

Il Problema delle Atmosfere Stellari:
un Approccio Strutturale
*Seminario tenuto all'Osservatorio Astronomico di
Capodimonte nell'aprile 1999*

Lucio Crivellari

Pubblicazioni Osservatorio Astronomico di Capodimonte, 2002

Prefazione

Nell'aprile del 1999 sono stato invitato dall'Osservatorio Astronomico di Capodimonte a tenere un Seminario di dieci ore, indirizzato agli studenti di Dottorato, che ho voluto dedicare al problema delle atmosfere stellari, con particolare considerazione alle sue basi fisiche.

Un'atmosfera stellare è la sede di numerosi fenomeni, interdipendenti tra loro, che interessano l'idrodinamica, la termodinamica ed il trasporto radiativo. Il legame tra i distinti processi si esprime quantitativamente per mezzo di una serie di leggi di conservazione, imposte alle grandezze che si devono introdurre per rappresentare il sistema fisico "atmosfera stellare". Sono proprio le leggi di conservazione che determinano la struttura dell'atmosfera. Il calcolo della struttura - che in pratica sarà possibile solo per via numerica - costituisce quello che viene definito il *problema delle atmosfere stellari*.

Per poter interpretare i risultati delle sue osservazioni, non solamente quelle nell'ambito della fisica stellare, l'astronomo ha bisogno di calcolare spettri sintetici che riproducano la distribuzione spettrale dell'energia radiativa emessa dalle stelle, Per conseguire tale fine egli deve essere in grado di costruire un modello degli strati stellari più esterni, dai quali emerge la radiazione osservata. Il calcolo autoconsistente di tali modelli costituisce un problema di non facile soluzione, dovuto alla sua non-linearità, che deriva dalla natura stessa dei fenomeni fisici che entrano in gioco.

Nelle pagine che seguono ho voluto scrivere in forma compiuta il contenuto del Seminario di Capodimonte, cercando di mettere in risalto quello che ne era stato il fine: presentare il problema delle atmosfere stellari come un esempio di problema fisico fortemente non-lineare, e di proporre per la sua soluzione un algoritmo sequenziale iterativo che possa costituire un utile paradigma per la soluzione di una più ampia classe di problemi non-lineari.

Il testo che viene qui presentato riprende la trattazione sviluppata originariamente nel corso del Seminario: in risposta alla richiesta degli astronomi di strumenti di calcolo per l'interpretazione degli spettrogrammi stellari e la descrizione quantitativa della struttura e del bilancio energetico negli strati stellari esterni, dimostrare come la formulazione del problema delle atmosfere stellari, in termini *fisici operativi*, porti in modo naturale alla realizzazione di algoritmi efficienti ed affidabili per la sua soluzione numerica.

Devo confessare che, lusingato, ho accettato di buon grado la proposta degli amici napoletani di lasciare loro un testo che riprendesse in forma

organica i contenuti del Seminario. Per rendermi conto rapidamente che il lavoro era più difficile, e soprattutto più lungo, di quanto avessi immaginato al principio. Sono dovuti trascorrere quasi due anni perchè trovassi gli intervalli di tempo necessari per potermi dedicare alla revisione e trascrizione delle mie note, scoprendo ogni volta inadeguatezze, se non veri e propri errori.

La conseguenza di questo ritardo è stata che, alla luce dello studio del trasporto radiativo che il mio lavoro di ricerca mi ha portato a compiere negli ultimi anni, riconsidero oggi criticamente quanto sono andato scrivendo. Per esempio, lascerei cadere la formulazione basata sul modello dei raggi, che avevo ripreso dalle "Lezioni sulla Teoria della Radiazione Termica" di Planck, che mi era sembrata non solo particolarmente adatta per mettere in relazione le grandezze impiegate nella descrizione macroscopica del trasporto radiativo con la radiometria classica, ma anche per la chiarezza pedagogica e l'indubbio interesse storico del testo di Planck.

Conseguenza ancor più importante è il fatto che la maturazione delle idee alla base dei procedimenti di calcolo descritti nelle pagine seguenti, avvenuta nel frattempo, non permette di considerarli come un punto di arrivo. Il contenuto del testo che viene qui presentato deve quindi essere visto solamente come una tappa - anche se certamente fondamentale - di un lavoro *in fieri*.

Mi preme soprattutto riconoscere in questa sede che l'impostazione generale del problema e la soluzione proposta di un approccio sequenziale iterativo non sono "farina del mio sacco". Nascono dal pluriennale lavoro di Eduardo Simonneau sopra distinti aspetti della teoria del trasporto radiativo. Ho avuto la fortuna di poter collaborare con lui in questo campo, e gli sono debitore dell'apprendimento delle nuove idee e metodologie, da lui introdotte.

Per altro, quanto ho scritto rappresenta una rielaborazione personale, e mi trovo nell'imbarazzo perchè, se non vedo corretto da un lato tacere il nome dell'autore, ancor più scorretto mi sembra presentare le sue idee originali senza avergli dato la possibilità di una verifica, facendolo così responsabile delle distorsioni che potrei aver introdotto nella mia "vulgata".

Sarebbe doveroso da parte mia ringraziare esplicitamente tutti quelli che, in tempi differenti e con differente grado di coinvolgimento, mi hanno aiutato nella stesura di queste note. Non lo faccio perchè sono troppo numerosi, e preferisco evitare ingiuste omissioni. A tutti va la mia riconoscenza

per per avermi stimolato inizialmente ad intraprendere questo lavoro, e successivamente incoraggiato a portarlo a compimento.

La Laguna, marzo 2002.

Indice

1	Interazione radiazione - materia	1
1.1	Descrizione fenomenologica	1
1.1.1	Il campo di radiazione	3
1.1.2	Propagazione della radiazione attraverso il mezzo	5
1.2	Definizione delle grandezze fondamentali	8
1.2.1	Intensità specifica del campo di radiazione	8
1.2.2	I momenti del campo di radiazione	11
1.3	I coefficienti del trasporto radiativo	15
1.3.1	Il coefficiente di diffusione	15
1.3.2	Il coefficiente di emissione	17
1.3.3	Il coefficiente di attenuazione	18
2	Stato fisico della materia	21
2.1	Stato esterno e stato interno del sistema	22
2.2	Sistema in Equilibrio Termodinamico	23
2.2.1	Definizione di Equilibrio Termodinamico	23
2.2.2	Equilibrio Termodinamico Locale	24
2.3	Stato esterno del sistema	25
2.4	Stato interno del sistema	26
2.4.1	Stato interno in ETL	26
2.4.2	Stato interno in non-ETL	27
2.5	Coefficienti di Einstein-Milne	32
2.5.1	Profili dei coefficienti radiativi	32
2.5.2	La formulazione di Einstein-Milne	34
2.6	Equazioni dell'Equilibrio Statistico	38
3	l'equazione del trasporto radiativo	41
3.1	Formulazione dell'equazione TR	42
3.2	L'equazione TR in geometria piano - parallela	45

3.2.1	La geometria piano - parallela	45
3.2.2	Intensità emergenti ed incidenti	46
3.2.3	Localizzazione delle condizioni iniziali	48
3.3	Funzione sorgente e profondità ottica	48
3.4	Il sistema delle equazioni TR	50
3.4.1	Natura non-locale e non-lineare del trasporto radiativo	50
3.4.2	L'accoppiamento delle equazioni TR	51
4	Descrizione di un'atmosfera stellare	57
4.1	Il sistema fisico "atmosfera stellare"	57
4.2	Condizioni di equilibrio e struttura del sistema	59
4.3	Le equazioni fondamentali	60
4.3.1	Le equazioni per la materia	61
4.3.2	Le equazioni per il campo di radiazione	67
4.4	Il problema delle atmosfere stellari	70
5	L'approccio iterativo sequenziale	75
5.1	Analisi del metodo sequenziale	75
5.2	Determinazione della temperatura	80
5.2.1	Ipotesi sul modello di atmosfera stellare	80
5.2.2	Il sistema di equazioni rappresentative dell'atmosfera .	82
5.2.3	La correzione della temperatura	83
6	Il metodo dei Fattori di Iterazione	89
6.1	Trasporto in equilibrio radiativo	89
6.2	I Fattori di Iterazione	94
6.3	Il problema dell'atomo con due livelli	96
6.3.1	L'equazione TR per il problema dell'atomo con due livelli	96
6.3.2	Soluzioni numeriche iterative	98
6.4	Il caso dell'atomo con vari livelli	111
A	I coefficienti di di Einstein	119

Capitolo 1

Aspetti dell'interazione radiazione - materia

Lo scopo di questa monografia è quello di arrivare ad una formulazione autoconsistente del problema delle atmosfere stellari, e di darne una soluzione per mezzo di un algoritmo numerico che sia il risultato di una simulazione analogica dei processi fisici in gioco. Pertanto, la descrizione dell'interazione radiazione - materia presentata in questo capitolo sarà necessariamente limitata a quegli aspetti che interessano lo specifico problema considerato.

1.1 Descrizione fenomenologica

Per definizione, un'atmosfera stellare è quella regione della stella dove si forma lo spettro elettromagnetico osservato. L'analisi qualitativa e quantitativa di quest'ultimo è l'unico strumento a nostra disposizione per inferire le proprietà fisiche delle atmosfere e, più in generale, delle stelle nel loro complesso.

Al fine di poter effettuare tale diagnostica, si rende necessario lo studio di un sistema fisico, il *mezzo*, costituito da un plasma di particelle (molecole, atomi, ioni ed elettroni liberi, in percentuali che dipendono dalle condizioni fisiche del mezzo), e da un *campo di radiazione* (le cui caratteristiche spettrali sono legate alle condizioni fisiche del mezzo), che permea il plasma ed interagisce con esso. Concretamente, dovremo prendere in considerazione la propagazione del campo, prodotto da sorgenti primarie, attraverso un mezzo otticamente eterogeneo, formato cioè da particelle separate tra loro. Le particelle diffondono ed assorbono una parte della radiazio-

ne; possono inoltre emettere radiazione a spese dell'energia che assorbono, comportandosi così come sorgenti secondarie del campo.

Non sarà superfluo puntualizzare sin d'ora che, per i nostri fini, considereremo soltanto la radiazione *termica*, quella cioè emessa da un corpo in virtù della sua temperatura. Questa restrizione ci permetterà di introdurre una serie di semplificazioni nella rappresentazione sia del campo di radiazione che del mezzo.

Lo studio che ci accingiamo ad intraprendere richiederà una descrizione autoconsistente del *trasporto di energia* ad opera del campo di radiazione e dello *scambio di energia* tra questo e le particelle del mezzo. La mutua influenza delle due componenti e la presenza di un fenomeno di trasporto danno origine ad un problema **non locale** e **non lineare**, che sarà espresso attraverso un sistema di equazioni per lo stato della materia (equazioni costitutive e dell'equilibrio statistico) e per il trasporto dell'energia radiativa (equazione del trasporto radiativo), accoppiate tra loro.

Il primo passo verso la soluzione del problema presuppone una soddisfacente descrizione di entrambe le componenti del sistema fisico e delle loro interazioni, basata su di una rappresentazione *fenomenologica* dei processi fisici in gioco. A questo scopo introdurremo opportune quantità *macroscopiche*, che siano rappresentative della corrispondente descrizione *microscopica* delle stesse. Queste grandezze saranno definite per mezzo di valori medi delle corrispondenti variabili microscopiche.

Approfittiamo per riprendere, da Zemansky e Dittman ¹, un confronto tra le caratteristiche delle grandezze macroscopiche e quelle della rappresentazione microscopica.

Proprietà comuni alle grandezze macroscopiche:

- 1) non implicano nessuna assunzione specifica circa la struttura della materia e del campo di radiazione;
- 2) un numero limitato di queste è sufficiente per descrivere il sistema;
- 3) sono grandezze fondamentali, come è suggerito in modo più o meno diretto dalla nostra esperienza sensoriale;
- 4) in generale, possono essere misurate direttamente.

Proprietà della rappresentazione microscopica:

- 1) richiede una serie di ipotesi circa la intima struttura della materia e del campo di radiazione (*i.e.*, un *modello*);

¹M.W. Zemansky e R.H. Dittman, *Heath and Thermodynamics*, 1997, (Singapore: McGraw-Hill), 7^a ed., Cap. 1

- 2) sono necessarie molte grandezze fisiche per descrivere il sistema;
- 3) queste grandezze non sono in genere suggerite dalle nostre percezioni sensoriali, ma dal modello impiegato;
- 4) tali grandezze non sono misurabili direttamente, ma vengono calcolate a partire dal modello.

L'insieme delle grandezze macroscopiche che introdurremo risulterà sufficiente per la trattazione matematica del problema. La soluzione completa richiederà inoltre la conoscenza del valore di opportune costanti fisiche, come di un insieme di condizioni iniziali ed al contorno. Date queste ultime, non solo sarà determinata l'evoluzione spazio-temporale del campo di radiazione, ma anche gli effetti che quest'ultimo induce sul mezzo con il quale interagisce.

1.1.1 Il campo di radiazione

Nella descrizione fisica dell'interazione tra il campo di radiazione e la materia, *l'osservabile fondamentale è l'energia*. Il campo elettromagnetico è completamente determinato dalle equazioni di Maxwell. Da queste, attraverso l'introduzione del vettore di Poynting, $S \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, possiamo non solo descrivere la densità di energia del campo, ma anche il modo con cui questo si propaga.

Noi però, come già annunciato, in alternativa a quella elettromagnetica, utilizzeremo la descrizione fenomenologica macroscopica citata più sopra. Come in *radiometria*, assumeremo che il campo di radiazione sia costituito da un insieme di radiazioni caratterizzate dalla loro *direzione* ed *energia: raggi*. Tale punto di vista ignora le proprietà ondulatorie della luce, ed assimila la propagazione dell'energia radiativa ad un flusso di particelle puntiformi che si propagano lungo traiettorie rettilinee.

Utilizzeremo il concetto di raggio per rappresentare l'energia di frequenza ν trasportata con velocità c lungo la direzione \mathbf{n} , che attraversa nell'unità di tempo una superficie unitaria perpendicolare ad \mathbf{n} ².

La visione corpuscolare della radiazione, già introdotta da Newton, fu ripresa da Einstein (1905)³ per spiegare, come è noto, l'effetto fotoelettrico.

²Dal punto di vista fisico, una quantità finita di energia radiativa non può propagarsi lungo una direzione geometrica, ma si dovrà sempre considerare un angolo solido, piccolo a piacere però *finito*, che si stringe attorno alla direzione \mathbf{n} . Analogamente, in natura non esiste una radiazione rigorosamente monocromatica. Vedremo nel seguito come, per mezzo di opportune operazioni di passaggio al limite, diventerà lecito parlare di radiazione di frequenza ν lungo una direzione \mathbf{n} .

³Einstein introduce l'ipotesi del quanto di luce nel 1905 (*Annalen der Physik*, **17**, 133);

L'ipotesi di Einstein, in seguito confermata sperimentalmente dall'effetto Compton, portò al concetto di *fonone* (Lewis, ⁴ 1926). Secondo la definizione proposta da Lewis, i fotoni sono "entità ben definite, increabili ed indistruttibili, che attuano come portatori dell'energia radiante e, dopo esser state assorbite, persistono come componenti essenziali dell'atomo che le ha assorbite, fino a quando sono emesse, trasportando un nuovo pacchetto di energia". Ai fini della trattazione dei processi di assorbimento ed emissione della radiazione, è importante sottolineare che l'elemento che caratterizza il fotone dal punto di vista fisico è il suo *contenuto indivisibile di energia*, espresso attraverso la relazione di Planck $\varepsilon_\nu = h\nu$.

Il modello corpuscolare del campo di radiazione può tradursi in una descrizione analoga a quella della fluidodinamica: l'energia emessa viene assimilata ad un flusso di particelle (i fotoni) che si muovono lungo traiettorie determinate dalle leggi dell'ottica geometrica, e che possono trasferire la loro energia alle particelle materiali che costituiscono il mezzo. L'energia trasportata dalla radiazione da un punto ad un altro del mezzo è data dalla somma delle energie trasportate da tutti i fotoni che riescono a raggiungere il secondo punto, partendo dal primo.

In radiometria l'energia trasportata dalla radiazione soddisfa le tre ipotesi seguenti (*ipotesi radiometriche*):

- 1) si propaga nel vuoto, con velocità c , lungo traiettorie rettilinee ;
- 2) per un raggio dato, è una grandezza additiva nello spazio e nel tempo;
- 3) per radiazioni differenti, è una grandezza additiva in direzione e frequenza.

Trattare i fotoni come particelle classiche in luogo di pacchetti d'onda significa assumere che la loro coerenza spaziale e temporale è "piccola" rispetto alle dimensioni geometriche ed alla durata caratteristiche dei fenomeni considerati. Tale condizione fa salve le ipotesi (1) - (3), a condizione che le sorgenti siano altamente incoerenti, il che si verifica nel caso di sorgenti termiche ⁵

l'aspetto corpuscolare della luce è invocato successivamente da Einstein come conseguenza della direzionalità dei processi di emissione ed assorbimento della radiazione nel suo articolo del 1917 (*Physikalische Zeitschrift*, **I.28**, 121).

⁴G.N. Lewis, 1926, *Nature*, **118**, 874.

⁵Un'analisi qualitativa approfondita del significato fisico della precedente affermazione, ancor oggi attuale nonostante l'epoca in cui fu fatta, è contenuta nelle "Lezioni sulla Teoria della Radiazione Termica" di Planck (M. Planck, *The Theory of Heat Radiation*, 1912, Tomash Publishers/ American Institute of Physics, 1988, Cap I, §§2-13.), dove si discute in dettaglio il differente ordine di grandezza tra le dimensioni geometriche delle porzioni di materiale interessato nei processi radiativi, e la lunghezza d'onad della radia-

Egualemente, la densità del mezzo attraverso il quale si propaga la radiazione dovrà essere tale che la radiazione diffusa dalle particelle materiali non presenti effetti di coerenza, in modo che restino valide le ipotesi (1) - (3). Questo si compie effettivamente nel caso considerato di un mezzo *diluito*, per il quale la distanza media tra le particelle è molto maggiore della lunghezza d'onda della radiazione. Rimane quindi giustificata il modello dei raggi per una descrizione fenomenologica della propagazione di un campo di radiazione attraverso un'atmosfera stellare ⁶.

L'ipotesi (3), che permette di considerare le loro energie come additive, implica che radiazioni differenti sono necessariamente indipendenti, cioè non correlate. Questo comporta una difficoltà intrinseca nel momento di rappresentare il campo di radiazione: per specificarne completamente lo stato in un determinato punto non sarà sufficiente un'unica quantità (un singolo vettore), ma si dovrà considerare l'insieme (virtualmente infinito) dei raggi che passano per il punto in questione.

1.1.2 Propagazione della radiazione attraverso il mezzo

Lo stato fisico del campo di radiazione e quello del materiale attraverso il quale la radiazione si propaga, risultano determinati dalle reciproche interazioni tra le due componenti; in ultima analisi dal mutuo interscambio di energia. Dovremo pertanto essere in grado di esprimere il bilancio energetico del sistema globale, calcolando in ogni punto la quantità di energia radiativa che il materiale sottrae al campo (*assorbimento*) e quella che gli restituisce (*emissione*).

La nostra scelta di descrivere il campo di radiazione per mezzo di raggi di definita energia e direzione si basa, come già detto, sull'ipotesi corpuscolare per la radiazione. Questo comporta profonde implicazioni fisiche per quanto riguarda il *trasporto* ed il *trasferimento* dell'energia del campo di radiazione, che noi considereremo sulla base della teoria di Planck-Einstein della quantizzazione della radiazione.

Per descrivere i processi di interscambio di energia tra il campo di

zione. Egualemente, si considera l'ancor più fondamentale differenza tra le scale di tempo dei fenomeni alla base dell'interazione tra la materia e la radiazione, ed il periodo di vibrazione di quest'ultima. Un approfondimento quantitativo della discussione può essere trovato in Rutily (B. Rutily, *Solutions Exactes de l'Equation de Transfert et Applications Astrophysiques*, 1992, Tesi Dottorale, Université Claude Bernard - Lyon I, Cap. I.)

⁶Nuovamente, un approfondimento dei concetti sopra esposti, così come un'esauriente discussione quantitativa dei limiti di validità dell'approssimazione corpuscolare può essere trovata in Rutily (1992, *op. cit.*).

radiazione e le particelle, dovremo introdurre per queste ultime un modello che sia coerente con la suddetta formulazione.

Per la materia, consistentemente con la nostra ipotesi di un mezzo diluito, supporremo che la temperatura sia sufficientemente elevata e la pressione sufficientemente bassa, per cui le particelle possano essere considerate come pacchetti d'onda localizzati con dimensioni molto inferiori alla loro separazione media. In tale maniera, si potrà assumere che le particelle abbiano posizioni e momenti ben definiti, come nella fisica classica, ancorchè posseggano *gradi di libertà interni*, come ammesso dalla fisica quantistica. Ai fini della nostra descrizione sarà comunque sufficiente un modello atomico basato sui principi della prima formulazione quantistica (Bohr-Sommerfeld): gli atomi (e gli ioni) sono dotati di un sistema di livelli energetici, sia discreti che continui, entro i quali si verificano transizioni legato-legato e legato-libero.

Un'appropriata descrizione fenomenologica dei processi di assorbimento ed emissione, coerente con il modello che abbiamo adottato, è quella che considera l'evoluzione spazio-temporale dei singoli raggi; vale a dire come ogni raggio individuale è creato, si propaga attraverso il mezzo risultandone attenuato o rinforzato, ed alla fine si estingue se non riesce a sfuggire attraverso la superficie che delimita il mezzo.

La *creazione* di un raggio è dovuta ad un processo di *emissione* di energia da parte di un elemento di materia, a spese di un'altra forma di energia. Sono numerose le cause che possono indurre una sostanza ad emettere radiazione elettromagnetica. Noi però, come già detto, ci restringeremo al solo caso della creazione di energia a spese dell'energia cinetica delle particelle, o della riemissione di energia, previamente sottratta al campo di radiazione attraverso processi di assorbimento. In altre parole, considereremo l'emissione di energia radiativa a spese dell'*energia interna* del materiale. Chiameremo *emissione termica* tale processo, anche se a rigore la radiazione termica è definita come quella emessa da un corpo, le cui proprietà fisiche e chimiche dipendono solamente dalla sua temperatura assoluta ⁷.

Sappiamo, secondo la nostra visione corpuscolare della materia, che su scala microscopica non possiamo considerare un elemento che emette come omogeneo: le sorgenti effettive sono le particelle, che restituiscono individualmente sotto forma di radiazione l'energia che, in differenti modi, avevano precedentemente assorbito. Però, sulla scala di dimensioni considerate dalla nostra descrizione macroscopica, sarà sempre lecito assumere che i volumi che richiudono le sorgenti dei singoli raggi siano tali che le proprietà

⁷Cf. Planck, *op. cit.*, Capitolo I, § 7.

della materia in essi contenuta si possano considerare omogenee. Potremo così introdurre un *coefficiente macroscopico di emissione*.

Le stesse considerazioni andranno tenute presenti al momento di studiare la *propagazione* dei raggi attraverso il mezzo.⁸ Cominceremo col considerare in termini qualitativi i processi microfisici che portano all'*attenuazione* di un raggio. Tale effetto è il risultato di due ben distinti processi fisici. Da una parte, una frazione dell'energia del raggio è costantemente rimossa dalla direzione originaria, e deviata istantaneamente in altre direzioni per opera delle particelle del mezzo. Chiameremo *diffusione* questo fenomeno, che non comporta né creazione né distruzione di energia radiante. D'altra parte, le particelle possono sottrarre energia al raggio, incrementando la loro energia interna. Questo secondo fenomeno, che implica una sottrazione netta di energia radiante, costituisce un processo di *assorbimento*.

Al tempo stesso, le particelle del mezzo possono attuare come sorgenti del campo di radiazione attraverso i processi microfisici inversi di quelli considerati nel caso dell'attenuazione.

A livello microfisico, l'interazione radiazione-materia sarà descritta in termini di collisioni tra i fotoni e le particelle materiali. Per la nostra ipotesi di un mezzo diluito, il comportamento cinetico di quest'ultimo potrà essere assimilato a quello di un gas perfetto. Pertanto le collisioni delle particelle, tra loro e con i fotoni, saranno di tipo binario, come si assume nella teoria cinetica classica. Inoltre, non si verificheranno fenomeni di "ombra", cioè non si considera che una particella schermi un'altra, nè appaiano effetti collettivi o di interferenza tra i fotoni.

Su tali basi, è giustificato considerare il corrispondente processo macroscopico come *lineare*, e potremo scrivere il coefficiente di attenuazione per un sistema di N particelle come N volte quello di una singola particella. Tale linearità ci permette di considerare il mezzo, ai fini della propagazione dei raggi, come costituito da elementi omogenei, che diffondono ed assorbono la radiazione proporzionalmente alla quantità di energia che ricevono ed al loro volume.

Di conseguenza, d'accordo con questa rappresentazione fenomenologi-

⁸Una trattazione, totalmente consistente dal punto di vista metodologico, dei processi di diffusione, assorbimento ed emissione di un fotone ad opera di una particella è data solamente dall'elettrodinamica quantistica, che considera le osservabili del campo elettromagnetico come operatori. Ciò nonostante, una teoria semi-classica dell'interazione tra fotoni ed atomi risulterà sufficiente ai fini della presente trattazione, quando dovremo interpretare in termini microfisici i coefficienti fenomenologici macroscopici, e calcolarne i corrispondenti valori. L'uso di una teoria semi-classica, ammissibile perchè non contraddice i principi della meccanica quantistica, risulta giustificata a posteriori dalla sua capacità di fornire risultati in accordo con quelli dell'elettrodinamica quantistica.

ca dell'interazione radiazione - materia, potremo determinare un *coefficiente macroscopico di attenuazione* che esprima quantitativamente il rapporto tra l'energia sottratta al raggio e quella trasportata dal raggio stesso, a partire dalla misura dell'attenuazione.

1.2 Definizione delle grandezze fondamentali

Conoscere le proprietà fisiche del sistema in esame significa per noi saper assegnare, in ogni punto del mezzo, i valori del campo di radiazione e delle variabili fisiche che caratterizzano lo stato della materia. Ciò implica la definizione previa di opportune grandezze. Cominceremo con quelle relative al campo di radiazione; successivamente, nella § 1.3, introdurremo i coefficienti di emissione ed attenuazione, che definiremo globalmente *coefficienti del trasporto*.

A partire dall'osservabile fondamentale, che è la quantità di energia trasportata dai raggi, definiremo l'*intensità specifica del campo di radiazione*. Anche se dal punto di vista fisico, come già abbiamo voluto precisare, non ha senso parlare di energia in un punto, o che si propaga lungo una direzione, grazie ad opportune operazioni di passaggio al limite che discuteremo più avanti, saremo in grado di definire l'intensità specifica come una grandezza *locale e direzionale*.

Di fronte alla futura necessità di una formulazione microfisica (cinetica), sarà opportuno "tradurre" la formulazione macroscopica, interpretando l'intensità specifica del campo di radiazione come la *funzione di distribuzione per i fotoni*, e l'equazione del trasporto radiativo come la corrispondente *equazione cinetica* (equazione di Boltzmann). Alla base di tale corrispondenza sta la teoria della quantizzazione dell'energia del campo elettromagnetico di Planck-Einstein.

1.2.1 Intensità specifica del campo di radiazione

Come preannunciato, definiremo una quantità *locale e direzionale*, a partire da un'osservabile fisica: la quantità di energia radiante $\Delta E_\nu(\mathbf{n})$ che in un determinato intervallo di tempo fluisce attraverso una superficie assegnata dentro un angolo solido che si stringe attorno ad una data direzione. È evidente che per misurare una quantità finita di energia dovremo considerare un elemento di superficie ed un angolo solido di dimensioni finite. Inoltre, non sarà mai possibile selezionare un'energia radiante rigorosamente monocromatica, e la misura prenderà necessariamente un tempo finito.

In generale la distribuzione di energia corrispondente alle differenti frequenze del campo di radiazione (*distribuzione spettrale*) non sarà uniforme. Si consideri l'intervallo spettrale $\Delta\nu$, centrato sulla frequenza data ν . La quantità di energia emessa nell'intervallo $\Delta\nu$ divisa per il medesimo, rappresenta l'energia media nell'intervallo. Se facciamo tendere $\Delta\nu$ a zero con ν mantenuto costante, detto valor medio *tende ad un limite finito*, indipendente dall'ampiezza della banda dimensioni $\Delta\nu$. Potremo definire tale limite come *radiazione di frequenza ν* .

Fissiamoci ora su di un punto P , identificato dal vettore posizione $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ in un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z) , ed una direzione \mathbf{n} . Sia $\mathbf{k}\Delta S$ l'elemento di superficie *orientata* attraverso la quale fluisce l'energia, e $\Delta\Omega$ l'angolo solido attorno ad \mathbf{n} . Se facciamo le dimensioni di ΔS sufficientemente "piccole", possiamo ridurci alle condizioni che in ogni punto di ΔS l'energia che fluisce dentro angoli solidi eguali abbia le medesime caratteristiche. Le leggi sperimentali della radiometria mostrano che $\Delta E_\nu(\mathbf{n})$ risulta proporzionale a ΔS ed a $\Delta\Omega$, nonchè all'intervallo di tempo Δt ed alla banda di frequenze $\Delta\nu$ considerati nella misura. Vale inoltre la *legge del coseno* (di Lambert), per cui $\Delta E_\nu(\mathbf{n})$ è proporzionale all'angolo formato dalle direzioni \mathbf{n} e \mathbf{k} . Scriveremo dunque

$$\Delta E_\nu(\mathbf{n}) \propto \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta\Omega \Delta\nu \Delta t \quad (1.1)$$

per riassumere la relazione di proporzionalità tra l'osservabile fisica ed ogni singolo elemento (*geometrico, spettrale e temporale*) del processo di misura. Ancora una volta, l'evidenza sperimentale dimostra che il limite

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})^{-1} \lim_{\Delta S \Delta\Omega \Delta\nu \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E_\nu(\mathbf{n})}{\Delta S \Delta\Omega \Delta\nu \Delta t} \equiv I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \quad (1.2)$$

esiste ed è finito, e determina il coefficiente di proporzionalità della relazione espressa dall'eq. (1). Rimane così definita l'**intensità specifica del campo di radiazione**. In tale maniera, siamo riusciti ad associare la quantità $I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$ al raggio (\mathbf{n}, ν) . Per le ipotesi radiometriche (1) - (3), l'intensità specifica risulta essere una grandezza macroscopica estensiva della posizione \mathbf{r} e del tempo t , caratterizzata dai parametri \mathbf{n} (direzione) e ν (frequenza) che individuano il raggio (\mathbf{n}, ν) .

Il concetto di intensità specifica, qui introdotto euristicamente, è suscettibile di una trattazione formale che, partendo dall'idealizzazione di esperimenti concreti e sulla base delle proprietà di additività (2) e (3) che abbiamo ipotizzato per i raggi nella § 1.1.1, permette la definizione rigorosa delle operazioni di passaggio al limite contenute nell'eq. (1.2), grazie alle

quali possiamo introdurre una grandezza fisica definita nel punto P , lungo la direzione \mathbf{n} alla frequenza ν , all'istante t .⁹ Le dimensioni di I sono $[I] = MT^{-2}$, e le sue unità nel sistema *cgs* sono $erg\ cm^{-2}st^{-1}hz^{-1}s^{-1}$.

La natura corpuscolare dei fotoni suggerisce l'introduzione del concetto di *funzione di distribuzione* per questi ultimi. Tale funzione è definita in modo che la grandezza $f(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)d\Omega d\nu$ esprima il numero di fotoni per unità di volume nel punto P all'istante t che si propagano con velocità c lungo la direzione \mathbf{n} dentro l'angolo solido $d\Omega$ e nella banda di frequenze $d\nu$. Il concetto di raggio, che abbiamo quantificato per mezzo dell'intensità specifica $I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$, implica un fenomeno di trasporto. L'introduzione della funzione di distribuzione per i fotoni rende ancor più esplicita la descrizione del trasporto: $f(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$ esprime il numero di particelle che si muovono con velocità c lungo una direzione \mathbf{n} , trasportando energia $h\nu$ e momento $(h\nu/c)\mathbf{n}$.

Dobbiamo ora trovare la relazione che intercorre tra l'intensità specifica del campo di radiazione e la funzione di distribuzione dei fotoni. Il numero di fotoni che attraversano l'elemento di superficie orientata $\mathbf{k}dS$ nell'intervallo di tempo dt , moltiplicato per l'energia $h\nu$ di ciascuno di essi, darà l'energia trasportata

$$dE_\nu(\mathbf{n}) = h\nu f(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS) (c dt) d\Omega d\nu . \quad (1.3)$$

Dalla definizione di $I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$, come è data dall'eq. (1.2), segue che

$$dE_\nu(\mathbf{n}) = I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS d\Omega d\nu dt ; \quad (1.4)$$

pertanto tra l'intensità specifica del campo di radiazione e la funzione di distribuzione dei fotoni intercorre la relazione

$$I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) = ch\nu f(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) . \quad (1.5)$$

Le dimensioni di f sono $[f] = L^{-3}T$, e le sue unità nel sistema *cgs* sono $cm^{-3}st^{-1}hz^{-1}$.

Un fotone di energia $h\nu$ trasporta una quantità di momento pari a

$$\mathbf{p} = \frac{h\nu}{c} \mathbf{n} . \quad (1.6)$$

Pertanto possiamo scrivere la funzione di distribuzione dei fotoni in funzione del momento \mathbf{p} : $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$. Il cambio di variabile definito dall'eq. (1.6) permette di riscrivere l'eq. (1.5) come

⁹Per chi volesse approfondire tale aspetto, si raccomanda: Preisendorfer, *Radiative Transfer on Discrete Spaces*, 1965, (Oxford: Pergamon Press), Cap. 2, §8.)

$$I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} F(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t), \quad (1.7)$$

che dimostra come la quantità $I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)/\nu^3$ - fatto salvo il fattore moltiplicativo c^2/h^4 - è una funzione di distribuzione, alla quale si possono applicare i metodi della Teoria Cinetica¹⁰.

1.2.2 I momenti del campo di radiazione

Il modello idrodinamico, che abbiamo adottato per la rappresentazione del trasporto radiativo, ci porta ora, in analogia a quanto si fa in fluidodinamica, a definire una serie di valori medi sopra le direzioni per l'intensità specifica $I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$ o, equivalentemente, per la funzione di distribuzione $f(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$. Sono i *momenti angolari* di dette quantità, che rappresentano le grandezze fisiche fondamentali legate al trasporto e conservazione dell'energia e del momento del campo di radiazione.

Intensità media e densità di energia del campo di radiazione

L'*intensità media* del campo di radiazione è definita in modo naturale come

$$J_\nu(\mathbf{r}, t) \equiv J(\mathbf{r}, t; \nu) \equiv \frac{1}{4\pi} \oint I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) d\Omega. \quad (1.8)$$

Le sue dimensioni sono le stesse di quelle dell'intensità specifica: $[J_\nu] = MT^{-2}$; le sue unità nel sistema *cgs* sono invece *erg cm⁻² hz⁻¹ s⁻¹*. L'intensità media J_ν è la media diretta dei valori dell'intensità specifica, corrispondente al *momento di ordine zero* della funzione $I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$ rispetto al parametro direzionale \mathbf{n} .

Poichè l'energia del campo di radiazione si propaga attraverso il mezzo con velocità finita c , volumi finiti dello spazio contengono una quantità finita di energia radiativa. Il limite del rapporto tra la quantità di energia monocromatica ed il volume che la contiene, quando quest'ultimo tende a zero, esprime la *densità monocromatica* di energia u_ν . Tale grandezza risulta essere proporzionale all'intensità media del campo di radiazione J_ν , come ora dimostreremo.

¹⁰Il legame tra la funzione di distribuzione dei fotoni e l'intensità specifica è discusso nell'articolo *Kinetic Theory of Spectral Line Formation*, J. Oxenius & E. Simonneau, 1994, *Annals of Physics*, **234**, 60.

A tale fine, prendiamo un elemento di volume infinitesimo dV dello spazio, che si stringe attorno ad un arbitrario punto P . Individuamo successivamente una superficie sferica Σ di raggio R , centrata in P . (Si veda la Fig. 1.1.) Supponiamo ora che R sia molto maggiore delle dimensioni lineari del volume dV , ma al tempo stesso sufficientemente piccolo da garantire che lungo tale distanza non si verificano in forma apprezzabile processi di emissione, assorbimento o diffusione. Possiamo allora assumere che l'energia che permea il volume dV sia trasportata dai raggi che provengono dai punti della superficie Σ .

Consideriamo inizialmente una sola direzione \mathbf{n} , individuata dalla retta che congiunge il punto P , al centro del volume dV e della sfera di raggio R , con il punto P' sulla superficie Σ . Un angolo solido $d\Omega'$ con vertice in P' stacca dentro il volume dV una porzione solida di dS e lunghezza dl .

L'energia che entra attraverso la superficie dS rimane per un tempo $dt = dl/c$ dentro il volume dV . Quindi, per la definizione di intensità specifica, la quantità di energia monocromatica proveniente da P' , contenuta ad ogni istante dentro dV , sarà pari a quella emessa dall'elemento di superficie dS' dentro l'angolo solido $d\Omega'$ nell'intervallo di tempo $dt = dl/c$:

$$dE_\nu(\mathbf{n}) = I(P', t; \mathbf{n}, \nu) dS' d\Omega' \frac{dl}{c} d\nu. \quad (1.9)$$

Se teniamo in conto che $d\Omega' = dS/R^2$, e che $dS' = d\Omega R^2$, l'eq. (1.9) diventa

$$dE_\nu(\mathbf{n}) = \frac{1}{c} I(P', t; \mathbf{n}, \nu) dV d\Omega d\nu. \quad (1.10)$$

Ora, per come è definita, l'intensità specifica gode della fondamentale proprietà di invarianza: se non vi sono sorgenti e pozzi lungo il cammino del raggio, la sua intensità specifica è indipendente dalla distanza percorsa. Segue pertanto che, per le ipotesi fatte, $I(P', t; \mathbf{n}, \nu)$ è eguale nel nostro caso a $I(P, t; \mathbf{n}, \nu)$. Potremo allora scrivere

$$\frac{dE_\nu(\mathbf{n})}{dV} = \frac{1}{c} I(P, t; \mathbf{n}, \nu) d\Omega d\nu. \quad (1.11)$$

La quantità totale di energia monocromatica contenuta dentro il volume dV sarà data dalla somma di tutte le sorgenti nei punti P' dell'intera superficie Σ , operazione questa giustificata dalla terza ipotesi radiometrica. Questo si traduce nell'integrazione dell'eq. (1.11) su tutti gli angoli solidi $d\Omega$, che porge

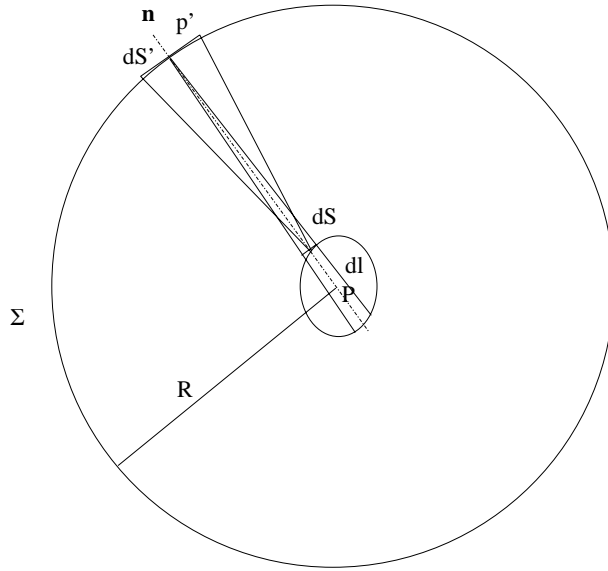


Figura 1.1: La geometria per il calcolo della densità dell'energia radiativa

$$u_\nu(\mathbf{r}, t) \equiv \oint \frac{dE_\nu(\mathbf{n})}{dV d\nu} d\mathbf{n} = \frac{1}{c} \oint I(P, t; \mathbf{n}, \nu) d\Omega . \quad (1.12)$$

Per la definizione di valor medio del campo di radiazione, data dall'eq. (1.8), segue allora

$$u_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} J_\nu(\mathbf{r}, t) . \quad (1.13)$$

Dimensionalmente, u_ν è una densità spettrale di energia: $[u_\nu] = ML^{-1}T^{-1}$; le sue unità *cgs* sono $erg\ cm^{-3}hz^{-1}$.

Flusso dell'energia radiativa

Un raggio (\mathbf{n}, ν) trasporta attraverso un elemento di superficie $\mathbf{k}dS$ una quantità di energia, il cui valore è dato dall'eq. (1.4). Per calcolare il tasso netto δe_ν di energia radiante che fluisce attraverso $\mathbf{k}dS$ per unità di tempo ed intervallo unitario di frequenze, dovremo tenere in conto tutte le direzioni \mathbf{n} ed integrare su $d\Omega$ l'eq. (1.4):

$$\delta e_\nu(\mathbf{r}, t) = \oint I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS d\Omega, \quad (1.14)$$

tenendo in conto che stiamo considerando intervalli unitari di frequenze e tempo.

Introdurremo ora il *vettore flusso di radiazione* $\mathcal{F}_\nu(\mathbf{r}, t)$, definito in maniera tale che il suo prodotto scalare con $\mathbf{k} \cdot dS$ dia il valore di δe_ν :

$$\delta e_\nu(\mathbf{r}, t) = \mathcal{F}_\nu(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{k} dS. \quad (1.15)$$

Dal confronto tra le equazioni (1.14) ed (1.15) discende immediatamente che

$$\mathcal{F}_\nu(\mathbf{r}, t) = \oint I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} d\Omega. \quad (1.16)$$

Nel sistema *cgs* \mathcal{F}_ν è misurato in $\text{erg cm}^{-2} \text{hz}^{-1} \text{s}^{-1}$; le sue dimensioni sono, ancora una volta, $[\mathcal{F}_\nu] = MT^{-2}$.

In analogia con l'intensità media del campo di radiazione, definiamo ora la quantità vettoriale

$$\mathbf{H}_\nu(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \oint I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} d\Omega, \quad (1.17)$$

che rappresenta il *momento di ordine uno* dell'intensità specifica rispetto ad \mathbf{n} . E' immediata la relazione

$$\mathcal{F}_\nu(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) = 4\pi \mathbf{H}_\nu(\mathbf{r}, t), \quad (1.18)$$

che lega la quantità fisica flusso dell'energia radiativa con il primo momento dell'intensità specifica del campo di radiazione.

Il tensore pressione di radiazione

Cominciamo con l'introdurre formalmente il *momento di ordine due* dell'intensità specifica, che è un tensore del secondo ordine, definito come

$$\mathcal{K}_\nu(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \oint I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} \mathbf{n} d\Omega, \quad (1.19)$$

dove $\mathbf{n} \mathbf{n}$ indica il prodotto diadico del versore \mathbf{n} con se stesso. Scritto in componenti cartesiane, \mathcal{K}_ν assume la forma

$$K_{ij}(\nu) = \frac{1}{4\pi} \oint I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) n_i n_j d\Omega, \quad (1.20)$$

dove n_i ed n_j sono i coseni direttori di \mathbf{n} rispetto agli assi i e j .

Calcoliamo ora la quantità

$$P_{ij}(\nu) = \frac{1}{c} \oint I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) n_i n_j d\Omega . \quad (1.21)$$

Se sostituiamo l'intensità specifica $I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$ con la funzione di distribuzione per i fotoni, $f(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$, in base all'eq. (1.5) otteniamo

$$P_{ij}(\nu) = \oint (f c n_i) \frac{h\nu n_j}{c} d\Omega . \quad (1.22)$$

Il primo fattore dell'integrando esprime il numero di fotoni che nell'unità di tempo hanno attraversato un'area unitaria perpendicolare alla componente i -esima della direzione \mathbf{n} . Il secondo, la componente j -esima del momento $(h\nu/c) \mathbf{n}$ trasportato da ogni singolo fotone. L'integrale su tutte le direzioni \mathbf{n} fornisce il tasso netto del flusso della componente j -esima del momento attraverso l'elemento di superficie considerato. Le nove componenti $P_{ij}(\nu)$ formano un tensore del secondo ordine, \mathcal{P}_ν , che si identifica immediatamente (in analogia con la fluidodinamica) con la pressione esercitata in un punto dal campo di radiazione monocromatico di frequenza ν . L'analisi dimensionale conferma che $P_{ij}(\nu)$ ha le caratteristiche di una pressione per unità di banda di frequenza (*dyne* hz^{-1}): $[P_{ij}(\nu)] = ML^{-1}T^{-1}$.

Discende allora immediatamente il legame fisico tra il momento \mathcal{K}_ν e la pressione del campo di radiazione \mathcal{P}_ν :

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{4\pi}{c} \mathcal{K}_\nu . \quad (1.23)$$

Le dimensioni e le unità di misura delle componenti di \mathcal{K}_ν sono le stesse di quelle di J_ν e delle componenti di \mathcal{F}_ν .

1.3 I coefficienti del trasporto radiativo

1.3.1 Il coefficiente di diffusione

Prima di studiare in dettaglio i coefficienti del trasporto, sarà necessario discutere, sia pure in termini sommari e qualitativi, il fenomeno della diffusione. Come tale intendiamo un processo che non implica *nè creazione nè distruzione di energia radiante*, ma solamente *ridistribuzione* in direzione (ed eventualmente in frequenza) dell'energia del campo di radiazione.

I processi di diffusione dovranno essere tenuti in debito conto quando, come vedremo nelle due prossime sezioni, descriveremo i processi globali di emissione ed attenuazione dei raggi lungo una data direzione. Nel primo

caso, all'energia radiante creata a spese di altre forme di energia ed emessa lungo il raggio considerato, dovrà aggiungersi quella che il raggio guadagna perchè una frazione dell'energia che si propagava originariamente lungo un altro raggio è deviata lungo la sua direzione. Analogamente, nel secondo caso, il raggio considerato perde non solo l'energia che le particelle assorbono, ma anche quella che viene deviata in altre direzioni.

Per distanze piccole, potremo assumere che tale perdita è proporzionale al percorso Δs . Denomineremo σ_ν tale costante, che risulta essere indipendente dall'intensità della radiazione. (Qui, come più avanti quando introdurremo i coefficienti di emissione e di estinzione, facciamo uso dell'ipotesi, giustificata in § 1.1.2, che gli elementi che diffondono ed assorbono la radiazione possono essere considerati come omogenei.)

In generale, il *coefficiente di diffusione* σ_ν dipenderà non solo dalle proprietà del mezzo (in termini microfisici, dalla struttura atomica dei centri di diffusione), ma anche, ed in misura rilevante, dalla frequenza della radiazione. Per come σ_ν è stato introdotto, le sue dimensioni risultano essere quelle del reciproco di una lunghezza: $[\sigma_\nu] = L^{-1}$, e le sue unità *cgs* saranno cm^{-1} .

Dobbiamo ora quantificare la frazione di energia che, deviata da tutte le altre direzioni, entra a far parte di quella trasportata lungo il raggio \mathbf{n} . Non tratteremo qui la descrizione del fenomeno di ridistribuzione in termini del cambio in direzione e frequenza che i fotoni soffrono, e che si formula in termini della funzione di ridistribuzione $R(\mathbf{n}', \nu'; \mathbf{n}, \nu) d\nu' d\nu (d\Omega'/4\pi)(d\Omega/4\pi)$, la quale esprime la probabilità cumulativa che un fotone con frequenza ν' che si avvicina al centro diffusore dentro l'angolo solido $d\Omega'$ attorno alla direzione \mathbf{n}' , sia deviato dentro l'angolo solido $d\Omega$ attorno ad \mathbf{n} con frequenza ν differente.

Considereremo solamente la probabilità $\Pi_\nu(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ che la frazione di energia deviata da un raggio di direzione \mathbf{n}' si ritrovi ad essere trasportata lungo il raggio di direzione \mathbf{n} . (Cioè, per semplificare il discorso, trascuriamo i possibili effetti di ridistribuzione in frequenza.) La relativa quantità di energia sarà espressa allora da

$$\eta_\nu^D(\mathbf{n}) = \oint d\Omega' \Pi_\nu(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \sigma_\nu I(\mathbf{n}', \nu), \quad (1.24)$$

dove si sono tenute in conto tutte le direzioni incidenti \mathbf{n}' integrando sull'intero angolo solido 4π .

Per i nostri futuri fini, ci sarà utile ricavare un'espressione valida nel caso particolare di diffusione isotropa, che rappresenta per altro una

ragionevole approssimazione del fenomeno reale. Se assumiamo per ogni direzione la stessa probabilità, pari a $1/4\pi$, l'eq. (1.24) diventa

$$\eta_\nu^D = \sigma_\nu \frac{1}{4\pi} \oint d\Omega' I(\mathbf{n}', \nu) = \sigma_\nu J_\nu . \quad (1.25)$$

1.3.2 Il coefficiente di emissione

La creazione di un raggio, od il suo rafforzamento, vengono generalmente denominati con il termine di *emissione*. Per il principio di conservazione dell'energia, la creazione avviene sempre a spese di un'altra forma di energia. Nel caso che stiamo considerando, della radiazione termica, sarà l' *energia interna* del materiale stellare.

Per arrivare alla voluta definizione in termini energetici del coefficiente di emissione, cominceremo, come di consueto, a suddividere idealmente la sostanza che emette in elementi di volume ΔV che siano per un lato sufficientemente piccoli da poter essere trattati come infinitesimi, e per un altro sufficientemente grandi da poter trascurare la struttura microscopica della materia. Sarà allora possibile trattare l'emissione dell'elemento di materia Δm contenuto in ΔV come se il contributo di ciascuno dei suoi punti fosse uniforme. Chiameremo *elemento di volume emittente* ognuno di questi elementi ΔV .

Per semplificare la trattazione, supporremo che il mezzo che emette sia *isotropo*. Pertanto, l'elemento ΔV emette *uniformemente in tutte le direzioni*. Come già detto, dal punto di vista fisico, una quantità *finita* di energia non può propagarsi lungo una direzione. Considereremo perciò angoli solidi $\Delta\Omega$, con vertice nei punti appartenenti al volume ΔV . Per l'isotropia del mezzo, la radiazione irradiata dentro $\Delta\Omega$ sarà proporzionale all'angolo stesso.

Se ora riprendiamo tutte le considerazioni sin qui fatte e ripetiamo la medesima operazione di passaggio al limite che abbiamo eseguito per definire l'intensità specifica come rapporto tra l'osservabile fisica e gli elementi del relativo processo di misura, l'energia emessa dall'elemento di volume dV , dentro l'angolo solido $d\Omega$, nell'intervallo di frequenza $d\nu$ e di tempo dt , si potrà esprimere come

$$dE_\nu = \eta_\nu^{Te} dV d\Omega d\nu dt . \quad (1.26)$$

Resta così definito il coefficiente di proporzionalità $\eta_\nu^{Te} \equiv \eta^{Te}(\mathbf{r}, t; \nu)$ che descrive l'*emissione termica* del mezzo nel punto P di posizione \mathbf{r} . Tale

coefficiente esprime una proprietà del materiale, che dipende sia dalle caratteristiche intrinseche delle particelle, sia dallo stato termodinamico del mezzo. Al presente livello della trattazione, non andremo più oltre nei dettagli della sua struttura.

Il coefficiente di emissione *totale* dovrà tenere in conto che il guadagno globale di energia per un raggio in un dato punto è la somma di due contributi separati: il processo di *creazione* di energia radiante a spese dell'energia interna del mezzo ed un'iniezione di energia lungo la direzione del raggio dovuta ai fotoni provenienti da altre direzioni, cioè il contributo del processo di diffusione descritto nella § 1.3.1.

Potremo pertanto scrivere il *coefficiente di emissione totale*, η_ν , come la somma di un contributo *termico* e di uno *diffusivo*:

$$\eta_\nu = \eta_\nu^{Te} + \eta_\nu^D . \quad (1.27)$$

Il primo termine dipenderà dalla temperatura del materiale e, nel caso non valga la condizione di equilibrio termodinamico, anche dal campo di radiazione, il secondo (cf. eq. [1.25]) dalla densità di energia del campo di radiazione. Le dimensioni di η_ν sono $[\eta_\nu] = ML^{-1}T^{-2}$, e le sue unità nel sistema *cgs* sono $erg\ cm^{-3}\ sr^{-1}\ hz^{-1}\ s^{-1}$.

1.3.3 Il coefficiente di attenuazione

In questa sezione introdurremo il *coefficiente di attenuazione*, in una forma tale che permetta di esprimere quantitativamente l'energia sottratta ad un raggio dal materiale in ogni punto del sistema. Sulla base della descrizione fenomenologica riassunta nella § 1.1.2 e della definizione di intensità specifica del campo di radiazione, sarà possibile arrivare alla definizione del coefficiente di attenuazione come un coefficiente macroscopico *locale* e *direzionale*.

Consideriamo un elemento di materia Δm , idealmente isolato dalla superficie chiusa ΔS che delimita un elemento di volume ΔV . Attraverso la superficie ΔS entrano ed escono fotoni. Il bilancio netto tra fotoni *incidenti* ed *emergenti* influisce fortemente sullo stato fisico dell'elemento Δm .

Faremo riferimento ad un cilindro che abbia come asse la direzione \mathbf{n} di propagazione dei fotoni, e le cui basi siano sufficientemente piccole per cui in ogni punto di ciascuna l'intensità specifica lungo \mathbf{n} si possa assumere costante. Il cilindro stacca due porzioni diametralmente opposte della superficie ΔS . Siano $\Delta\sigma$ e $\Delta\sigma'$ le loro proiezioni perpendicolari a \mathbf{n} , e Δs la loro distanza. (Al primo ordine, le aree di $\Delta\sigma$ e $\Delta\sigma'$ sono eguali.)

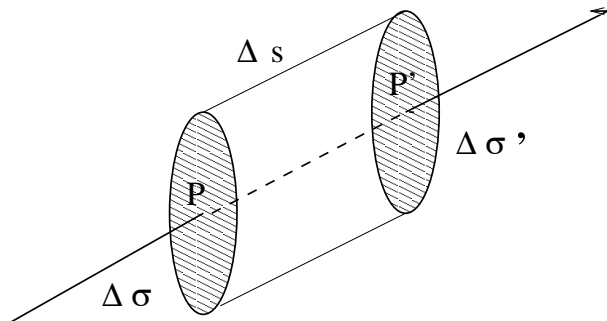


Figura 1.2: L'elemento di volume $\Delta V = \Delta \cdot \Delta \sigma$

Se indichiamo con \mathcal{N}_p il numero di particelle contenute nel volume ΔV che possono interagire con i fotoni che si propagano attraverso il medesimo volume, potremo scrivere la densità media ρ del materiale come

$$\rho = \frac{m_p \mathcal{N}_p}{\Delta V} \equiv m_p N_p, \quad (1.28)$$

dove m_p è la massa media delle particelle.

Come abbiamo visto nella § 1.1.2, l'attenuazione di un raggio (\mathbf{n}, ν) per effetto delle interazioni tra particelle e fotoni è dovuta alla somma dei due distinti processi di *diffusione* ed *assorbimento*.

Per la definizione di intensità specifica, la differenza tra l'energia che, durante l'intervallo di tempo dt , entra nel cilindro ΔV attraverso la superficie $\Delta \sigma$ e quella che esce attraverso $\Delta \sigma'$ sarà pari a

$$\Delta E_\nu(\mathbf{n}) \equiv [I(\mathbf{r}', t; \mathbf{n}, \nu) - I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)] \Delta \sigma \Delta \Omega \Delta \nu \Delta t. \quad (1.29)$$

È ragionevole assumere che tale differenza sia proporzionale all'energia radiativa contenuta nel volume ΔV , che è pari alla quantità di energia entrata attraverso la superficie $\Delta \sigma$ nell'intervallo di tempo Δt :

$$\Delta E_\nu(\mathbf{n}) \propto I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \Delta \sigma \Delta \Omega \Delta \nu \Delta t. \quad (1.30)$$

La differenza $I(\mathbf{r}', t; \mathbf{n}, \nu) - I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$, che appare nell'eq. (1.29), risulta eguale alla derivata direzionale di $I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$ lungo \mathbf{n} . La relazione di proporzionalità espressa dall'eq. (1.30) potrà essere allora riscritta in forma di equazione come

$$\frac{d}{ds} I(s, t; \mathbf{n}, \nu) = -k_\nu \frac{\rho}{m_p} I(s, t; \mathbf{n}, \nu), \quad (1.31)$$

dove s è un parametro che esprime la distanza misurata lungo la direzione \mathbf{n} .

Nell'eq. (1.31) la costante di proporzionalità è espressa come il prodotto di due fattori: la densità delle particelle, $N_p = \rho/m_p$ ed il coefficiente k_ν che quantifica la probabilità delle collisioni binarie particella-fotone. Le dimensioni di k_ν risultano essere quelle di una superficie, e pertanto potremo interpretarlo come una *sezione efficace*.

Possiamo finalmente definire il *coefficiente macroscopico di attenuazione*

$$\chi_\nu(\mathbf{r}) \equiv \frac{k_\nu(\mathbf{r})}{m_p} \rho(\mathbf{r}), \quad (1.32)$$

le cui dimensioni sono $[\chi_\nu] = L^{-1}$. (Come già nel caso del coefficiente di emissione $\eta(\mathbf{r}, t; \nu)$, l'ipotesi di isotropia del mezzo si riflette sull'isotropia del coefficiente di attenuazione: $\chi = \chi(\mathbf{r}, t; \nu)$.)

La quantità k_ν/m_p è usualmente chiamata (impropriamente) *coefficiente di assorbimento per unità di massa*. Costituisce una proprietà intrinseca delle particelle, e può essere calcolata per mezzo della meccanica quantistica.

Senza entrare nei dettagli, sarà sufficiente in questa sede limitarci a dire che, come già il coefficiente di emissione, anche quello di attenuazione si scompone in due termini:

$$\chi_\nu = a_\nu + \sigma_\nu, \quad (1.33)$$

dove a_ν quantifica i processi di assorbimento e σ_ν quelli di diffusione.

Capitolo 2

Lo stato fisico della materia in un'atmosfera stellare

Abbiamo definito atmosfera stellare la regione di una stella dove la radiazione emessa acquista le caratteristiche che sono riconoscibili nella distribuzione spettrale osservata. Pertanto lo studio quantitativo del campo di radiazione, imprescindibile per poter effettuare la diagnostica delle proprietà di un'atmosfera stellare, richiede necessariamente la conoscenza dello stato fisico del materiale stellare che costituisce l'atmosfera.

Quest'ultimo può essere descritto sia a livello *microscopico*, sia a livello *macroscopico*. Lo stato microscopico del materiale è definito dalla posizione e dal momento di tutte le particelle che lo compongono. Rimane quindi completamente determinato, in termini *cinetici*, quando sono noti i valori delle funzioni di distribuzione $f_q(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ di tutte le componenti atomiche q del sistema. Lo stato macroscopico può essere specificato per mezzo di opportune variabili *termodinamiche*, grandezze misurabili macroscopicamente in un sistema in condizioni di equilibrio o quasi-equilibrio, che si riconducono a particolari valori medi delle suddette funzioni di distribuzione.

Lo scopo di questo capitolo è quello di fornire una formulazione operativa delle funzioni che definiscono lo stato fisico del materiale. Specificheremo innanzitutto (§ 2.1) che cosa intendiamo per stato interno e stato esterno del sistema; dovremo successivamente (§ 2.2) richiamare la definizione di *Equilibrio Termodinamico* (ET), ed introdurre il concetto di *Equilibrio Termodinamico Locale* (ETL).

A questo punto saremo in grado (§ 2.3) di affrontare la descrizione dello stato esterno del sistema, e vedremo che in molti casi le assunzioni fatte sulle condizioni fisiche vigenti nelle atmosfere stellari giustificano l'ipotesi di

ETL, con notevole semplificazione del problema. La descrizione dello stato interno del sistema sarà affrontata nella § 2.4. Dopo aver esaminato nella § 2.4.1 la forma che le funzioni di distribuzione delle popolazioni atomiche assumono in condizioni di ETL (leggi di Saha e Boltzmann), studieremo in dettaglio il caso in cui l'ipotesi di ETL non è accettabile (§ 2.4.2). Discuteremo in dettaglio i processi che tendono a stabilire l'equilibrio dentro il sistema (processi collisionali), e quelli che dall'equilibrio tendono a scostarlo (processi radiativi). Da tale analisi uscirà la formulazione operativa dei tassi collisionali e radiativi che ci permetteranno di scrivere nella § 2.6 le equazioni dell'equilibrio statistico, che forniscono i valori delle funzioni di distribuzione delle popolazioni atomiche nel caso di non-ETL.

Nell'analisi dei processi radiativi appaiono i coefficienti atomici di Einstein per le transizioni radiative legato-legato e di Milne per quelle legato-libero. Li studieremo nella § 2.5, e vedremo qual'è la loro relazione con i coefficienti macroscopici di assorbimento ed emissione, definiti nella § 1.3.

Data la sua importanza nell'evoluzione storica dei concetti della meccanica quantistica, ci è sembrato opportuno aggiungere in Appendice un largo estratto dell'articolo originale di Einstein del 1917 sull'interazione tra radiazione e materia ed i relativi coefficienti.

2.1 Stato esterno e stato interno del sistema

Già abbiamo anticipato nella § 1.1.2 che il materiale stellare, data la sua temperatura e pressione, può essere trattato come un mezzo diluito, e che tale assunzione giustifica la sua rappresentazione per mezzo di un modello *semi-classico*: particelle con posizioni e momenti ben definiti, però dotate di struttura interna.

Pertanto, per poter dare una descrizione del sistema in termini microscopici, non sarà sufficiente specificare, per le particelle atomiche e gli elettroni liberi, solamente la loro distribuzione secondo i corrispondenti gradi di libertà *esterni*, cioè determinare le funzioni di distribuzione delle loro velocità. Per la descrizione completa dello stato del sistema dovremo specificare la ripartizione dell'energia interna tra i livelli energetici ammessi. Vale a dire, specificare come le particelle atomiche si distribuiscano secondo i loro gradi di libertà *interni*. Questo si traduce nella determinazione delle funzioni di distribuzione N_q^i e $(N_q^i)_j$, cioè rispettivamente il numero di particelle per unità di volume della specie q che sono nello stato di ionizzazione i e, per ogni stato di ionizzazione, il numero di particelle per unità di volume che si trovano nel livello energetico j .

Quando passeremo, sempre che ciò sia possibile, dalla descrizione microscopica a quella macroscopica, definiremo proprietà *meccaniche* quelle riferite ai soli gradi di libertà esterni; proprietà *termiche* quelle legate sia ai gradi esterni (velocità delle particelle) sia a quelli interni (energia interna: stato di ionizzazione ed eccitazione delle particelle atomiche).

2.2 Sistema in Equilibrio Termodinamico

2.2.1 Definizione di Equilibrio Termodinamico

L'esperienza del mondo sensibile porta a formulare il principio che un sistema, in uno stato iniziale caratterizzato da una distribuzione delle sue variabili tale da dar luogo a gradienti di forze e di temperatura, evolve naturalmente nel tempo verso uno stato stabile, nel quale i gradienti si sono annullati. In altre parole, i gradienti non nulli esistenti in condizioni di *non-equilibrio* causano moti che generano processi *irreversibili* di trasporto di materia ed energia, il cui risultato finale è quello di stabilire una condizione di *equilibrio*, caratterizzata dall'assenza di gradienti e da una distribuzione dei parametri fisici costante nel tempo.

Coerentemente con la nostra classificazione delle proprietà del sistema in meccaniche e termiche, possiamo distinguere due differenti tipi di equilibrio: *meccanico*, dove l'effetto delle forze esterne al sistema è compensato dal gradiente della pressione; *termico*, nel quale tutte le parti del sistema si trovano alla medesima temperatura. La combinazione dei due tipi di equilibrio porta alla definizione di **stato di equilibrio termodinamico**:

come conseguenza del secondo principio della termodinamica, un sistema di corpi di arbitraria composizione, forma e posizione, a riposo e circondato da pareti rigide ed adiabatiche, passa nel tempo ad uno stato stazionario, nel quale la temperatura di tutti i corpi è la medesima. L'entropia di tale stato ha il valore massimo compatibile con l'energia totale del sistema, fissato dalle condizioni iniziali.

Per un sistema nelle condizioni ideali di ET, si considera valido il seguente principio di *bilancio dettagliato*: in un sistema isolato in condizioni di ET alla temperatura T ogni singolo processo che interessa le sue componenti microscopiche è esattamente compensato dal corrispondente processo inverso. Questa è certamente una condizione sufficiente perchè il sistema si trovi in condizioni di ET. Usualmente la validità del principio si assume

pure come una condizione necessaria, anche se risulta molto difficile dare di questo una prova completa e rigorosa ¹.

La condizione di ET può venir espressa dall'affermazione equivalente che le funzioni di distribuzione delle componenti materiali del sistema hanno la loro *forma di equilibrio*, vale a dire quella dedotta dalla termodinamica statistica.

2.2.2 Equilibrio Termodinamico Locale

Come vedremo nella § 2.3, date le condizioni fisiche che caratterizzano un'atmosfera stellare, è ragionevole aspettarsi che le deviazioni dai valori di equilibrio delle funzioni di distribuzione delle velocità siano trascurabili, e l'ipotesi di un'unica distribuzione Maxwelliana per tutte le velocità, sia degli elettroni che degli atomi, può considerarsi valida. Per altro, l'esistenza stessa di un flusso di radiazione attraverso il bordo della stella implica un gradiente di temperatura. Però, se le dimensioni lineari del gradiente di temperatura risultano molto minori del cammino libero medio delle particelle, sarà lecito assumere che, in un opportuno intorno di ogni punto, lo stato *esterno* del materiale stellare possa essere considerato localmente in condizioni di equilibrio, alla temperatura T che caratterizza la distribuzione Maxwelliana delle velocità.

Per quanto riguarda i gradi di libertà interni, i processi che popolano e spopolano i livelli energetici, determinando le funzioni di distribuzione N_q^i ed $(N_q^i)_j$, coinvolgono il campo di radiazione, che dentro un'atmosfera stellare si scosta necessariamente dalla sua distribuzione di equilibrio, espressa dalla funzione di Planck. Solo nel caso che le collisioni anelastiche tra atomi ed elettroni liberi siano predominanti rispetto ai corrispondenti processi radiativi nel fissare le popolazioni dei livelli atomici, i valori delle funzioni di distribuzione N_q^i ed $(N_q^i)_j$ saranno quelli stabiliti dalla meccanica statistica per le condizioni di equilibrio.

Nelle regioni dell'atmosfera dove anche le funzioni di distribuzione corrispondenti ai gradi di libertà *interni* assumono i loro valori di equilibrio, il materiale stellare potrà considerarsi *localmente* in condizioni di ET. Tale condizione, meno restrittiva di quella di ET, va sotto il nome di *Equilibrio Termodinamico Locale*.

¹Si veda, A.S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*, 1926, (Cambridge: University Press), Cap. 3, § 34, ed anche J.P. Cox e R.T. Giuli, *Stellar Structure*, 1968, (New York/Londra/Parigi: Gordon & Breach), Cap. 3, §1.

2.3 Lo stato esterno del sistema

I processi che portano le distinte funzioni di distribuzione delle velocità ad assumere la forma Maxwelliana di equilibrio sono le collisioni *elastiche*. In principio, la unica causa che potrebbe allontanare le funzioni di distribuzione delle velocità dai loro valori di equilibrio sarebbe la fuga attraverso il bordo dell'atmosfera di quelle particelle, le cui velocità siano maggiori della velocità di fuga determinata dal campo gravitazionale della stella. Comunque, si può dimostrare che la densità di quegli strati che si considerano come il "bordo" della stella è sufficientemente grande perchè una particella soffra numerose collisioni prima di sfuggire liberamente. Per altro, data la forte attrazione gravitazionale esercitata dalla massa della stella, la probabilità di fuga risulta piccola.

Pertanto, date le condizioni fisiche supposte vigenti nelle atmosfere stellari, risulta consistente assumere l'ipotesi di ETL per poter semplificare la descrizione dello stato *esterno* del materiale. Questo permette di passare dalla rappresentazione microscopica a quella macroscopica (termodinamica), e di scrivere un'equazione di stato nella forma

$$P(r) = \frac{k}{m_H \mu(r)} \rho(r) T(r) . \quad (2.1)$$

Nell'eq. (2.1) k ed m_H rappresentano rispettivamente la costante di Boltzmann ($k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot K^{-1}$) e la massa dell'atomo di idrogeno ($m_H = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$). Il peso molecolare medio μ sarà definito più avanti.

Il legame tra la densità ρ nella descrizione macroscopica e le funzioni di distribuzione N_q^i ed $(N_q^i)_j$ della descrizione microscopica discende immediatamente dalla definizione di queste ultime (cf. § 2.1). Definito il numero totale per unità di volume delle particelle della specie atomica q :

$$N_q = \sum_i N_q^i = \sum_i \sum_j (N_q^i)_j . \quad (2.2)$$

trascurando la massa degli elettroni rispetto a quella degli atomi, la densità ρ potrà scriversi come

$$\rho = \sum_q m_q \cdot N_q , \quad (2.3)$$

dove m_q è la massa della particella atomica della specie q .

Poichè vale la condizione che la carica elettrica globale sia nulla, la densità elettronica N_e può essere espressa in termini delle densità ioniche parziali N_q^i :

$$N_e = \sum_q \sum_i i \cdot N_q^i. \quad (2.4)$$

Potremo allora definire la massa media μ delle particelle costituenti il materiale stellare:

$$\mu \equiv \frac{\rho}{\sum_q N_q + N_e} = \frac{\sum_q m_q \cdot N_q}{\sum_q [N_q + \sum_i i \cdot N_q^i]}. \quad (2.5)$$

dove m_H è la massa dell'atomo di idrogeno.

2.4 Lo stato interno del sistema

2.4.1 Stato interno in ETL

Se è ammissibile l'ipotesi di ETL, il rapporto tra le popolazioni dei livelli energetici di un determinato stato di ionizzazione i sarà date dalla legge di Boltzmann:

$$\frac{(N_q^i)_k}{(N_q^i)_j} = \frac{g_k}{g_j} \exp \left\{ -\frac{(\chi_q^i)_{jk}}{kT} \right\}. \quad (2.6)$$

dove $(\chi_q^i)_{jk} = E_k - E_j$ è l'energia richiesta per eccitare un atomo della specie q nello stato di ionizzazione i dal livello di energia inferiore E_j a quello di energia superiore E_k , e g_j e g_k sono i relativi pesi statistici.

Per altro, il rapporto tra le popolazioni di due successivi stati di ionizzazione i ed $i + 1$ sarà espresso dalla legge di Saha:

$$\frac{N_q^{i+1}}{N_q^i} N_e = 2 \frac{U_q^{i+1}}{U_q^i} \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\chi_q^{i,i+1}}{kT} \right\}. \quad (2.7)$$

dove $\chi_q^{i,i+1}$ è l'energia necessaria per portare al successivo stato di ionizzazione $i + 1$ un atomo della specie q che già si trova nello stato di ionizzazione i . U_q^i e U_q^{i+1} sono le corrispondenti funzioni di partizione ed N_e la densità elettronica.

2.4.2 Stato interno in non-ETL

L'ipotesi di ETL, dal momento che autorizza l'uso delle leggi di Maxwell e di Saha e Boltzmann per descrivere lo stato, sia esterno che interno, del materiale stellare, comporta un'enorme semplificazione al momento di calcolare un modello di atmosfera stellare. Anche se abbiamo detto più sopra che possono darsi situazioni nelle quali l'ipotesi di ETL è accettabile, questo non è comunque il caso generale. Dobbiamo pertanto intraprendere un'analisi più approfondita dei processi di interazione che si verificano tra le particelle, per poter decidere quando l'uso dell'ipotesi semplificatrice di ETL debba essere sostituito dalla determinazione delle singole funzioni di distribuzione delle particelle atomiche, relative allo stato interno del sistema, per mezzo di una trattazione cinetica dei suddetti fenomeni.

Lo stato interno del materiale stellare soddisfa i requisiti delle leggi della termodinamica statistica quando il sistema, allontanato dalla sua condizione di equilibrio, viene lasciato a se stesso senza soffrire perturbazioni esterne, per un tempo sufficientemente lungo da permettere che l'equilibrio si ristabilisca. In termini cinetici, se il tempo per ristabilire l'equilibrio per effetto solamente dei *processi interni al sistema* è molto minore della scala di tempo caratteristica delle perturbazioni esterne.

Nel nostro caso, i processi interni che instaurano la condizione di equilibrio rispetto ai gradi di libertà interni sono le collisioni anelastiche tra le particelle. L'equilibrio, così come è definito dalle leggi di Boltzmann e Saha, si raggiunge attraverso eccitazioni e ionizzazioni collisionali, ed i corrispondenti processi inversi.

Le perturbazioni che alterano l'equilibrio sono prodotte dall'interazione tra le particelle atomiche ed i fotoni. Dovuto alla fuga dei fotoni attraverso il bordo della stella, la loro funzione di distribuzione si scosterà dalla forma corrispondente all'equilibrio, data dalla funzione di Planck. (Per questo sarà necessario derivare la funzione di distribuzione dei fotoni per mezzo di un'equazione cinetica, l'*equazione del trasporto radiativo*, che considereremo nel prossimo capitolo.)

Pertanto, i processi di assorbimento dei fotoni, che spopolano i livelli energetici inferiori, e di emissione, che ripopolano questi ultimi a spese dei livelli superiori, possono essere considerati come un perturbazione delle popolazioni atomiche $(N_q^i)_j$. Se i processi di assorbimento e di emissione non si compensano tra loro, cosa che si verifica quando il campo di radiazione non ha il suo valore di equilibrio (od almeno di *quasi* equilibrio), i valori delle popolazioni atomiche non potranno essere quelli che corrispondono alla condizione di ETL.

Si renderà quindi necessaria una trattazione cinetica per descrivere lo stato interno del sistema in condizioni di non-ETL. A tale fine esamineremo in dettaglio i due tipi di processi che rispettivamente instaurano e perturbano l'equilibrio. Questa analisi ci permetterà di scrivere in una forma operativa i tassi collisionali e radiativi dei processi di eccitazione e ionizzazione, e dei rispettivi processi inversi.

Processi collisionali

I processi che stabiliscono l'equilibrio sono processi *interni* al sistema; nel nostro caso le collisioni tra le particelle atomiche. Le collisioni elastiche tra gli atomi determinano la distribuzione Maxwelliana delle loro velocità. In generale queste collisioni, anche se talvolta sufficientemente energetiche, non sono tuttavia efficaci per modificare lo stato interno degli atomi, per indurre cioè transizioni tra i livelli energetici (almeno nel caso di transizioni nel dominio spettrale compreso tra il vicino infrarosso e l'ultravioletto, dove le energie in gioco sono di alcuni eV). Al contrario lo sono le collisioni tra atomi ed elettroni liberi. Per ultimo, le collisioni tra elettroni liberi, molto frequenti per il grande raggio di interazione del potenziale Coulombiano, rapidamente ristabiliscono la forma Maxwelliana della funzione di distribuzione delle velocità degli elettroni.

Consideriamo ora le collisioni anelastiche che fissano le densità ioniche parziali N_q^i e le popolazioni $(N_q^i)_j$. Un elettrone con energia cinetica maggiore della soglia di ionizzazione $\chi_q^{i,i+1}$ per lo ione $(q)^i$ può ionizzare quest'ultimo e produrre uno ione $(q)^{i+1}$ ed un nuovo elettrone libero. I due elettroni si ripartiranno la frazione dell'energia cinetica, inizialmente posseduta dal primo, che eccede la soglia $\chi_q^{i,i+1}$.

Per poter determinare il tasso di questi processi, dobbiamo conoscere la sezione d'urto differenziale $Q^{i,i+1}(v)$, che dipenderà dalla velocità relativa tra l'elettrone e lo ione $(q)^i$. Ovviamente, la sezione d'urto sarà zero per valori di v corrispondenti ad un'energia cinetica dell'elettrone inferiore alla soglia di ionizzazione.

La probabilità $C^{i,i+1}$ che un tale processo si verifichi si ottiene integrando il prodotto di $Q^{i,i+1}(v)$ per la funzione di distribuzione della velocità degli elettroni, espressa nel sistema di riferimento dell'atomo. Comunque, a causa della grande differenza di massa tra l'atomo e l'elettrone, la funzione di distribuzione delle velocità relative coincide in pratica con la distribuzio-

ne Maxwelliana $f_M(v)$ delle velocità degli elettroni. Pertanto, la probabilità $C^{i,i+1}$ sarà data da

$$C^{i,i+1} = \int dv v f_M(v) Q^{i,i+1}(v), \quad (2.8)$$

ed il tasso globale $\Gamma^{i,i+1}$ (il numero totale di processi per unità di volume e di tempo) da

$$\Gamma^{i,i+1} = N_q^i N_e C^{i,i+1}. \quad (2.9)$$

Le dimensioni di $C^{i,i+1}$ sono $L^3 T^{-1}$ e quelle di $\Gamma^{i,i+1}$ sono $L^{-3} T^{-1}$.

Reciprocamente, se uno ione $(q)^{i+1}$ collide con un elettrone di qualsiasi energia cinetica in presenza di un secondo elettrone, lo ione può ricombinarsi collisionalmente, mentre il secondo elettrone acquista l'energia del primo più l'energia di ionizzazione $\chi_q^{i,i+1}$. Il tasso globale $\Gamma^{i+1,i}$ sarà:

$$\Gamma^{i+1,i} = N_q^{i+1} N_e C^{i+1,i}. \quad (2.10)$$

La probabilità di ricombinazione $C^{i+1,i}$ sta in relazione con la probabilità diretta $C^{i,i+1}$ secondo la formula

$$\frac{C^{i,i+1}}{C^{i+1,i}} = \left(\frac{N_q^{i+1}}{N_q^i} \right)^*. \quad (2.11)$$

(L'asterisco indica, come di consueto, che i valori delle quantità dentro la parentesi sono quelli corrispondenti all'equilibrio, in questo caso quelli fissati dalla legge di Saha.)

Così, una volta nota la sezione d'urto differenziale $Q^{i,i+1}(v)$ da misure di laboratorio, siamo in grado di calcolare la probabilità $C^{i,i+1}$ integrando il prodotto della prima per la distribuzione Maxwelliana $f_M(v)$ degli elettroni. La probabilità del processo inverso si ottiene direttamente dall'eq. (2.11).

In modo analogo possiamo trattare i processi di eccitazione e diseccitazione collisionali. Sia $Q_{jk}(v)$ la sezione d'urto differenziale per la collisione tra uno ione $(q)^i$ ed un elettrone, la cui velocità relativa all'atomo v sia tale da indurre la transizione tra i livelli energetici E_j ed E_k (dove $E_k > E_j$). Evidentemente v deve esser tale che l'energia cinetica dell'elettrone sia maggiore o uguale all'energia di eccitazione $\chi_{jk} = E_k - E_j$. Per integrazione sopra la funzione di distribuzione delle velocità degli elettroni (che di nuovo

si assume eguale alla distribuzione Maxwelliana), si ottiene la probabilità C_{jk} del processo di eccitazione². Il tasso globale $\Gamma_{j,k}$ sarà dato da

$$\Gamma_{j,k} = (N_q^i)_j N_e C_{jk} . \quad (2.12)$$

Il processo inverso è costituito dalla diseccitazione collisionale tra il livello E_k ed il livello E_j . Qui non c'è una soglia per la velocità dell'elettrone incidente, che al termine dell'interazione si porta via la quantità di energia corrispondente alla transizione. Il tasso globale $\Gamma_{k,j}$ sarà dato da

$$\Gamma_{k,j} = (N_q^i)_k N_e C_{kj} , \quad (2.13)$$

dove C_{kj} , la probabilità che la transizione da E_k a E_j si verifichi, è legata alla probabilità C_{jk} , data dalla formula

$$\frac{C_{jk}}{C_{kj}} = \left[\frac{(N_q^i)_k}{(N_q^i)_j} \right]^* . \quad (2.14)$$

(Nuovamente l'asterisco indica il rapporto tra i valori delle popolazioni che corrispondono al caso di equilibrio, rapporto che è dato dalla legge di Boltzmann.)

Processi radiativi

Come abbiamo già anticipato, sono i fotoni, la cui funzione di distribuzione non è quella di equilibrio, che perturbano lo stato interno del materiale stellare, attraverso i processi di assorbimento ed emissione.

Nell'ambito di una trattazione cinetica lineare, analoga a quella impiegata nella precedente § 2.4.1 per i processi collisionali, il numero di transizioni radiative sarà dato dalla teoria di Einstein-Milne. Per il momento, ci limiteremo a scrivere le formule relative ai tassi dei processi di eccitazione e ionizzazione, e dei corrispondenti processi inversi, mettendo in risalto la loro dipendenza dai valori del campo di radiazione e delle popolazioni dei livelli atomici, dai quali le transizioni hanno origine. La forma dei coefficienti di Einstein-Milne che appaiono nelle equazioni da (2.15) a (2.18), e le relazioni che tra essi intercorrono, saranno esaminati nella § 2.5.

Il tasso $R_{j,k}$ delle eccitazioni radiative che coinvolgono i livelli E_j ed E_k (con $E_k > E_j$) sarà espresso come

²Una formula esplicita per la probabilità C_{jk} può essere trovata in D. Mihalas, *Stellar Atmospheres*, 1978, (San Francisco: W.H. Freeman & Co.), Cap. 5, pp. 131-134.

$$R_{j,k} = (N_q^i)_j \int_0^\infty B_{jk} \varphi(\nu) J_\nu d\nu , \quad (2.15)$$

Nel caso di una ionizzazione radiativa che parte dal livello E_j di un atomo nello stato di ionizzazione i , il corrispondente tasso $R_j^{i,i+1}$ è dato da

$$R_j^{i,i+1} = N_q^i \int_{\nu_0}^\infty B_j^{i,i+1}(\nu) J_\nu d\nu . \quad (2.16)$$

Questi due processi radiativi sono analoghi ai corrispondenti processi collisionali, che abbiamo considerato in § 2.4.1. Le equazioni (2.15) e (2.16) corrispondono alle precedenti equazioni (2.12) e (2.9); le dimensioni di $R_{j,k}$ e di $R_j^{i,i+1}$ sono egualmente $L^{-3}T^{-1}$.

Il processo di diseccitazione radiativa tra un livello superiore E_k ed un livello inferiore E_j avrà un tasso dato da

$$R_{k,j} = (N_q^i)_k \int_0^\infty [B_{kj} \psi(\nu) J_\nu + A_{kj} \psi(\nu)] d\nu , \quad (2.17)$$

mentre il tasso dei processi di ricombinazione radiativa, che fanno decadere un atomo dallo stato di ionizzazione $i+1$ al livello E_j dello ione $(q)^i$, sarà dato da

$$R_j^{i,i+1} = N_q^{i+1} N_e \int_0^\infty [B_j^{i+1,i}(\nu) J_\nu + A_j^{i+1,i}(\nu)] d\nu . \quad (2.18)$$

In conclusione, nel caso di una transizione radiativa tra due livelli del medesimo ione $(q)^i$, possiamo calcolare facilmente, a partire dal valore del coefficiente di Einstein B_{jk} ³, i tassi di eccitazione e diseccitazione tra i livelli E_j ed E_k , se conosciamo il valor medio del campo di radiazione in un intorno della frequenza centrale $\nu_{jk} = (E_k - E_j)/h$ della transizione considerata.

Analogamente si calcolano i tassi di ionizzazione e ricombinazione radiativa tra due ioni $(q)^i$ e $(q)^{i+1}$, in due successivi stati di ionizzazione, noto il valore di J_ν per tutte le frequenze maggiori della frequenza corrispondente alla soglia di ionizzazione, a partire dal coefficiente $B_j^{i+1,i}(\nu)$ di Milne per il continuo.

³Come vedremo nella §2.5.2, le relazioni che intercorrono tra i coefficienti di Einstein, e le analoghe per i coefficienti di Milne, permettono di determinare il valore dei due coefficienti restanti, noto quello di uno.

2.5 I coefficienti radiativi di Einstein e Milne

Dobbiamo ora trattare in dettaglio i coefficienti di Einstein e Milne, che abbiamo introdotto nelle equazioni dei tassi delle transizioni radiative. In realtà, per ragioni di economia, ci occuperemo in questa sede solamente dei coefficienti di Einstein A_{kj} , B_{jk} e B_{kj} per le transizioni legato-legato. Per quanto riguarda i coefficienti $A_j^{i+1,i}(\nu)$, $B_j^{i,i+1}(\nu)$ e $B_j^{i+1,i}(\nu)$, introdotti da Milne ⁴ per generalizzare le relazioni di Einstein nel caso delle transizioni legato-libero, il lettore può consultare, per esempio, il testo di Mihalas ⁵.

Riassumeremo nella § 2.5.2 la teoria di Einstein-Milne, a partire dalla quale potremo introdurre i coefficienti di Einstein e le relazioni che tra essi intercorrono, nonché il loro legame con i coefficienti macroscopici di assorbimento ed emissione. Prima però (§ 2.5.1) considereremo la distribuzione in frequenza di questi ultimi. Come risultato, arriveremo a scomporli nel prodotto di due fattori: un profilo che descrive la loro dipendenza dalla frequenza, ed un termine indipendente dalla frequenza che contiene l'informazione sulle caratteristiche atomiche e la popolazione del livello di partenza della transizione radiativa considerata.

2.5.1 Profili dei coefficienti radiativi

Per comodità di esposizione, restringeremo ora il nostro modello atomico semi-classico ad un atomo che abbia solamente due stati stazionari: uno stato *fondamentale* ed uno stato *eccitato*. (Modello dell' *atomo a due livelli*.) Le transizioni da uno stato all'altro, accompagnate dall'assorbimento o dall'emissione di un quanto di energia pari alla differenza tra i due livelli, saranno per noi regolate dalle leggi fenomenologiche introdotte da Einstein, e che esamineremo nella sezione successiva. Inoltre, non considereremo in questa sede i processi di diffusione, ma solamente quelli di assorbimento ed emissione. Anche se restrittivo, tale modello atomico prende ciò nonostante in considerazione tutta la fisica essenziale dei processi di assorbimento ed emissione della radiazione luminosa da parte di un atomo. Rappresenta pertanto un utilissimo paradigma in vista di ogni ulteriore, più sofisticata, modellizzazione.

Dovremo quindi tenere in conto solamente le transizioni tra i due livelli j e k , con energie $E_k > E_j$.

L'evidenza sperimentale insegna che non esistono righe spettrali infinitamente sottili. Questo risultato è in accordo con l'interpretazione teorica,

⁴E.A. Milne, 1924, *Phil. Mag.*, **47**, 209.

⁵D. Mihalas, *op. cit.*, Cap. 4, pp. 94-95.

secondo la quale i livelli energetici tra i quali ha luogo la corrispondente transizione non possono essere infinitamente sottili. Dato il valore finito Δt della vita media di ciascun livello, vi è una indeterminazione intrinseca nel valore della sua energia, secondo la relazione di Heisenberg: $\Delta t \Delta E \geq \hbar$. A tale allargamento "naturale" si deve aggiungere quello dovuto alle perturbazioni esterne, causate sia dal campo di radiazione, nel quale l'atomo si trova immerso, sia dagli atomi che gli sono vicini. Oltre a queste cause, che influiscono sulla struttura interna dell'atomo, si deve considerare l'allargamento della riga spettrale per effetto Doppler, dovuto al moto casuale degli atomi che assorbono ed emettono.

Quindi i livelli energetici di un atomo si distribuiscono sopra una banda di energie (frequenze), per cui è necessario considerare le distribuzioni della densità di energia dei livelli. Tali distribuzioni costituiscono normalmente una serie di picchi, centrati in corrispondenza dei valori nominali della serie discreta di energie ammesse.

Il coefficiente macroscopico di assorbimento, che qui indicheremo con $a_{jk}(\nu)$, mostrerà allora una dipendenza dalla frequenza, perchè abbraccia tutte le possibili transizioni da un valore della distribuzione di energia centrata sul valore nominale E_j del livello inferiore j ad uno della distribuzione corrispondente del livello superiore k .

La distribuzione in frequenza di $a_{jk}(\nu)$ può essere caratterizzato dalla sua posizione nominale $\nu_0 = (E_k - E_j)/h$ e dal parametro $\Delta\nu$, definito come la separazione in frequenza tra i due punti dove il valore di $a_{jk}(\nu)$ si è ridotto alla metà del valore massimo (*larghezza a metà altezza*).

Ai fini della nostra trattazione, ci sarà molto comodo fattorizzare il coefficiente di assorbimento (e più avanti quello di emissione, ed altre quantità che dipendono dalla frequenza) nella forma seguente.

Calcoliamo l'integrale di $a_{jk}(\nu)$ su tutto lo spettro di frequenze, per ottenere la quantità

$$\bar{a}_{jk} \equiv \int_0^{\infty} a_{jk}(\nu) d\nu . \quad (2.19)$$

Possiamo allora definire il *profilo* $\varphi(\nu)$ del coefficiente $a_{jk}(\nu)$ come il rapporto

$$\varphi(\nu) = \frac{a_{jk}(\nu)}{\bar{a}_{jk}} . \quad (2.20)$$

Saremo allora in grado di esprimere $a_{jk}(\nu)$ come il prodotto

$$a_{jk}(\nu) = \bar{a}_{jk} \varphi(\nu) \quad (2.21)$$

del fattore "densità" \bar{a}_{jk} per il fattore "profilo" $\varphi(\nu)$.

In modo del tutto analogo potremo esprimere il coefficiente di emissione $\eta_{kj}(\nu)$ nella forma:

$$\eta_{kj}(\nu) = \bar{\eta}_{kj} \psi(\nu), \quad (2.22)$$

dove il profilo $\psi(\nu)$ sarà in generale differente dal profilo di assorbimento $\varphi(\nu)$.

2.5.2 La formulazione di Einstein-Milne

Nel suo fondamentale articolo del 1917⁶ sulla "Teoria Quantistica della Radiazione", Einstein formula una semplice teoria *fenomenologica* dei processi radiativi, basandosi sull'assunzione che le transizioni tra gli stati stazionari siano regolate da *leggi probabilistiche*, analoghe a quelle postulate nella teoria della radioattività.

Nella sua formulazione originale, Einstein prende in considerazione quale "agente" delle transizioni tra i livelli la densità specifica di energia u_ν , che è una quantità scalare *locale*, e definisce in funzione di questa i suoi coefficienti A_m^n , B_n^m e B_m^n . In un articolo (di considerevole importanza per la teoria generale delle atmosfere stellari) Milne⁷ riformula il problema considerando il caso del *trasporto della radiazione*. Considera cioè quale agente della transizione tra il livello j ed il livello k l'intensità specifica $I_\nu(\mathbf{n})$ del campo di radiazione. Viene così preso in considerazione l'aspetto *direzionale* del processo di trasporto dell'energia radiante.

La trattazione di Milne, che qui riprendiamo, permette di trovare il legame tra i coefficienti *atomici* di Einstein ed i coefficienti *macroscopici* di assorbimento ed emissione che abbiamo introdotto nel Capitolo 1 (v. §§1.2.4 e 1.2.3). Questo ci permetterà di esprimere i tassi di eccitazione e diseccitazione radiativi (così come quelli di fotoionizzazione e ricombinazione radiativa), dei quali avremo bisogno al momento di scrivere le equazioni dell'equilibrio statistico in una forma coerente con la nostra formulazione macroscopica.

Sia N_j il numero totale di atomi per unità di volume (udV) nel livello fondamentale j . D'accordo col fatto che il livello j non è infinitamente sottile, assumiamo con Milne che, per ogni frequenza ν nel intorno della frequenza nominale ν_{jk} della transizione $j \rightarrow k$, vi sia un numero (per udV) di atomi

⁶A. Einstein, 1917, *Physikalische Zeitschrift*, **18**, 121. (Si veda l'Appendice A.)

⁷E.A. Milne, 1924, *Mont. Not. R.A.S.*, **85**, 111.

$n_j(\nu) d\nu$ capaci di assorbire radiazione alle frequenze comprese nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$.

Milne riscrive la legge probabilistica di Einstein (v. eq. [b] dell'Appendice) per l'assorbimento da parte dell'atomo di un quanto di energia postulando che la probabilità per unità di tempo (udt) sia proporzionale all'intensità specifica del campo di radiazione. Se questo è isotropo, potremo scrivere ⁸

$$d\mathcal{P}_{j \rightarrow k} = B_{jk} J_\nu dt . \quad (2.23)$$

Però, se il campo di radiazione è anisotropo, dovremo considerare l'intensità specifica $I_\nu(\mathbf{n})$ che si propaga dentro un angolo solido infinitesimo $d\Omega$ attorno alla direzione \mathbf{n} . Sotto l'ipotesi che tutte le direzioni siano equiprobabili, la probabilità dell'assorbimento sarà data da

$$d\mathcal{P}_{j \rightarrow k} = B_{jk} I_\nu(\mathbf{n}) \frac{d\Omega}{4\pi} dt . \quad (2.24)$$

Pertanto, il numero di processi per udt , nei quali viene assorbito un quanto di energia con frequenza compresa nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$, dentro l'angolo solido $d\Omega$ lungo la direzione \mathbf{n} , sarà

$$n_j(\nu) d\nu B_{jk} I_\nu(\mathbf{n}) \frac{d\Omega}{4\pi} .$$

Se ora integriamo su tutte le direzioni, otteniamo il numero totale di tali processi per udt :

$$n_j(\nu) d\nu B_{jk} \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu(\mathbf{n}) d\Omega = N_j \varphi(\nu) d\nu B_{jk} J_\nu ,$$

dove abbiamo "fattorizzato" $n_j(\nu)$ nella forma $N_j \varphi(\nu)$.

Dato che l'energia di ogni quanto può considerarsi con ottima approssimazione eguale al valore $h\nu_{jk}$, la densità specifica di energia $u_\nu d\nu$ assorbita localmente dagli atomi per udt nell'intervallo $(\nu, \nu + d\nu)$ tenendo in conto tutte le direzioni, sarà evidentemente:

$$u_\nu d\nu = h\nu_{jk} B_{jk} N_j \varphi(\nu) J_\nu d\nu . \quad (2.25)$$

Poichè ci interessa la quantità totale di energia assorbita per udt dalla transizione, dovremo integrare su tutte le frequenze:

⁸Con la notazione B_{jk} (e più avanti con A_{kj} e B_{kj}) indichiamo i coefficienti come definiti da Milne. La relazione tra questi ultimi e quelli di Einstein nell'Appendice è data dal fattore (dimensionale) $4\pi/c$. Sarà quindi: $B_n^m = 4\pi/c B_{jk}$.

$$\int_0^\infty u_\nu d\nu = h\nu_{jk} B_{jk} N_j \int_0^\infty \varphi(\nu) J_\nu d\nu, \quad (2.26)$$

per ottenere

$$u = h\nu_{jk} B_{jk} N_j \bar{J}_{jk}, \quad (2.27)$$

dove

$$\bar{J}_{jk} \equiv \int_0^\infty \varphi(\nu) J_\nu d\nu \quad (2.28)$$

è la quantità di energia radiante assorbita dalla transizione $j \rightarrow k$.

Consideriamo ora un volume cilindrico infinitesimo dV di base $d\sigma$, perpendicolare alla direzione di propagazione \mathbf{n} dell'intensità specifica $I_\nu(\mathbf{n})$, e di altezza $dl = cdt$. Nel intervallo di tempo dt , per definizione di intensità specifica, fluisce attraverso $d\sigma$ una quantità di energia pari a $I_\nu(\mathbf{n}) d\sigma d\Omega dt d\nu$, che occupa il volume dV . Di questa energia, d'accordo con la nostra definizione di coefficiente di assorbimento, ne viene assorbita una frazione

$$\begin{aligned} dE_\nu(\mathbf{n}) &= a_{jk}(\nu) cdt I_\nu(\mathbf{n}) d\sigma d\Omega dt d\nu = \\ &a_{jk}(\nu) I_\nu(\mathbf{n}) dV d\Omega dt d\nu. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Possiamo allora riscrivere la densità specifica di energia $dE_\nu(\mathbf{n})$, assorbita per udt lungo la direzione \mathbf{n} , come

$$d\mathcal{E}_\nu(\mathbf{n}) \equiv \frac{dE_\nu(\mathbf{n})}{dV} = a_{jk}(\nu) I_\nu(\mathbf{n}) d\Omega d\nu. \quad (2.30)$$

Se ora integriamo su tutte le direzioni, risulta

$$u_\nu d\nu = a_{jk}(\nu) d\nu \oint I_\nu(\mathbf{n}) d\Omega = a_{jk}(\nu) 4\pi J_\nu d\nu; \quad (2.31)$$

e l'energia totale assorbita per udt dalla transizione $j \rightarrow k$ sarà espressa da

$$u = 4\pi \bar{a}_{jk} \int_0^\infty \varphi(\nu) J_\nu d\nu = 4\pi \bar{a}_{jk} \bar{J}_{jk}. \quad (2.32)$$

Dal confronto con l'eq. (2.27), discende immediatamente

$$\bar{a}_{jk} = \frac{h\nu_{jk}}{4\pi} N_j B_{jk}, \quad (2.33)$$

e pertanto potremo scrivere il coefficiente di assorbimento $a_{jk}(\nu)$ come

$$a_{jk}(\nu) = \bar{a}_{jk} \varphi(\nu) = \frac{h\nu_{jk}}{4\pi} N_j B_{jk} \varphi(\nu) . \quad (2.34)$$

In tal modo abbiamo messo in relazione il nostro coefficiente di assorbimento $a_{jk}(\nu)$ con la popolazione N_j del livello fondamentale j ed il corrispondente coefficiente atomico B_{jk} . La relazione espressa dall'eq. (2.33) è analoga a quella espressa originariamente da Füchtbauer (1920)⁹.

Come viene dimostrato nell'Appendice, tra i coefficienti di Einstein intercorrono le relazioni:

$$g_j B_{jk} = g_k B_{kj} \quad (2.35)$$

e

$$\frac{A_{kj}}{B_{kj}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} , \quad (2.36)$$

che rimangono valide anche per i coefficienti nella formulazione di Milne. Se ne facciamo uso, e teniamo in conto che il coefficiente A_{kj} è il reciproco del tempo di vita medio τ del livello eccitato k , a partire dall'eq. (2.33) si ottiene la relazione

$$\bar{a}_{jk} \propto \frac{N_j}{\tau} , \quad (2.37)$$

derivata originariamente da Ladenburg (1921)¹⁰.

Per quanto riguarda l'energia emessa, tenendo in conto i processi spontanei e quelli indotti, si arriva ad esprimere la densità specifica di energia $d\mathcal{E}_\nu(\mathbf{n})$, emessa per udt lungo una direzione \mathbf{n} , come

$$d\mathcal{E}_\nu(\mathbf{n}) = \frac{h\nu_{jk}}{4\pi} N_k [A_{kj} + B_{kj} I_\nu(\mathbf{n})] \psi(\nu) d\Omega d\nu . \quad (2.38)$$

Si vede chiaramente dal confronto tra le equazioni (2.34) e (2.38) che il contributo dell'emissione indotta ha la stessa struttura del termine di assorbimento, e può essere quindi considerato come una forma di assorbimento negativo. Da ciò la consuetudine di inglobare la quantità $(h\nu_{jk}/4\pi) N_k B_{kj} \psi(\nu)$

⁹C. Füchtbauer, 1920, *Physikalische Zeitschrift*, **21**, 322.

¹⁰R. Ladenburg, 1921, *Zeitschrift für Physik*, **4**, 451. La traduzione in inglese di questo articolo, importante per gli sviluppi della formulazione della meccanica delle matrici, si può trovare in "Sources of Quantum Mechanics", B.L. van der Waerden, editore, 1968, (New York: Dover).

nel coefficiente di assorbimento, e di identificare il coefficiente di emissione con il solo contributo dell'emissione spontanea.

Un ragionamento analogo a quello fatto per il coefficiente di assorbimento ci porterà finalmente a scrivere

$$\eta_{kj}(\nu) = \bar{\eta}_{kj}\psi(\nu) = \frac{h\nu_{jk}}{4\pi} N_k A_{kj} \psi(\nu). \quad (2.39)$$

Per quanto detto più sopra, il coefficiente di assorbimento sarà riformulato come

$$a_{jk}(\nu) = \bar{a}_{jk} \varphi(\nu) = \frac{h\nu_{jk}}{4\pi} [N_j B_{jk} - N_k B_{kj}] \varphi(\nu). \quad (2.40)$$

2.6 Le Equazioni dell'Equilibrio Statistico

Siamo ora in grado di riprendere e finalizzare il nostro studio dello stato del materiale stellare in condizioni di non-ETL. Questo rimarrà determinato se saremo in grado di specificare in ogni punto le popolazioni atomiche: densità ioniche parziali N_q^i e popolazioni $(N_q^i)_j$ dei livelli energetici di ciascuno ione, così come il valore del campo di radiazione e la densità elettronica N_e .

Le relative funzioni di distribuzione non avranno i valori corrispondenti all'equilibrio; pertanto dovremo ricorrere ad una trattazione *cinetica*. Dovremo cioè formulare un *bilancio* tra tutti i processi (esterni al sistema) che ne perturbano l'equilibrio, e tutti quelli (interni al sistema) che tendono a ristabilirlo. Sarà dunque questione di scrivere un'*equazione cinetica*, la cui forma generale può essere simbolizzata da:

$$\frac{d}{dt} \{funzione\ di\ distribuzione\} = \{sorgenti\} - \{pozzi\}.$$

Il termine di sinistra rappresenta la *derivata materiale* della funzione di distribuzione; quello di destra la differenza tra i processi che popolano e spopolano il livello considerato.

Abbiamo già discusso nella § 2.4 la fisica delle "sorgenti" e dei "pozzi", sia per i processi collisionali che per quelli radiativi, ed abbiamo scritto le formule per i tassi delle corrispondenti transizioni. Al fine di dare ora un esempio concreto della forma operativa che le equazioni dell'equilibrio statistico possono assumere, considereremo il caso particolare di un sistema stazionario costituito da particelle che hanno solamente livelli discreti di energia. (Conseguentemente, entreranno in gioco solo transizioni legato-legato.)

Lo stato stazionario del sistema implica l'annullarsi della derivata temporale delle relative funzioni di distribuzione, per cui il bilancio cinetico sarà espresso dall'equaglianza tra i tassi, collisionali e radiativi, che popolano e spopolano ogni singolo livello:

$$\begin{aligned} \sum_{u>j} (\Gamma_{u,j} + R_{u,j}) + \sum_{l<j} (\Gamma_{l,j} + R_{l,j}) = \\ \sum_{u>j} (\Gamma_{j,u} + R_{j,u}) + \sum_{l<j} (\Gamma_{j,l} + R_{j,l}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

La forma esplicita dei tassi collisionali e radiativi per i processi di eccitazione e diseccitazione era stata data dalle equazioni (2.12), (2.13), (2.15) e (2.17). Se ora indichiamo le popolazioni dei livelli con N_j ed N_k in luogo di $(N_q^i)_j$ ed $(N_q^i)_k$, e richiamiamo la definizione delle quantità \bar{J}_{jk} (cf. eq. [2.28]), che esprimono l'energia radiante assorbita da ogni transizione $j \rightarrow k$, a partire dall'eq. (2.41) otterremo per ogni livello j un'equazione del tipo:

$$\begin{aligned} \sum_{u>j} N_u [N_e C_{uj} + A_{uj} + B_{uj} \bar{J}_{ju}] + \sum_{l<j} N_l [N_e C_{lj} + B_{lj} \bar{J}_{jl}] = \\ N_j \left[\sum_{u>j} (N_e C_{ju} + B_{ju} \bar{J}_{ju}) + \sum_{l<j} (N_e C_{jl} + A_{jl} + B_{jl} \bar{J}_{jl}) \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

(Si noti che abbiamo qui introdotto l'ulteriore ipotesi semplificatrice della *ridistribuzione completa*: i profili di assorbimento $\varphi(\nu)$ ed emissione $\psi(\nu)$ sono assunti essere eguali.)

E' facile verificare che, per N livelli discreti, solo $N - 1$ equazioni di questo tipo risultano linearmente indipendenti. Bisogna pertanto chiudere il sistema, utilizzando la condizione che la somma delle popolazioni dei singoli livelli, $\sum_j N_j$, deve essere eguale al numero totale di particelle $N_{tot} \equiv N_q^i$.

Si tratta in modo analogo il caso che include transizioni, radiative e collisionali, tra i livelli di due ioni q^i e $q^{i'}$. Se l'energia del secondo è maggiore di quella del primo, si ha una fotoionizzazione; in caso contrario, una ricombinazione radiativa. Entreranno qui in gioco i coefficienti di Milne per il continuo: $A_j^{i+1,i}(\nu)$, $B_j^{i,i+1}(\nu)$ e $B_j^{i+1,i}(\nu)$.

Capitolo 3

L'equazione del trasporto radiativo

Non pretendiamo in questo capitolo di trattare in modo esaustivo il fenomeno del trasporto radiativo e le corrispondenti equazioni che lo governano. Esiste, ovviamente, una vasta letteratura sul tema, e sarebbe insensato volerla riassumere compiutamente in poche pagine. Ci limiteremo in questa sede soltanto a quegli aspetti che sono essenziali per affrontare il problema delle atmosfere stellari e, soprattutto, la sua soluzione numerica. In particolare, lo scopo principale del presente capitolo è quello di mettere in evidenza l'accoppiamento tra le equazioni specifiche per i singoli raggi, conseguenza della fisica del processo del trasporto radiativo.

Come già detto nel Capitolo 1, lo stato del campo di radiazione risulta intrinsecamente legato alle condizioni termodinamiche del mezzo, e le due componenti del sistema interagiscono mutuamente. Tale legame fisico è espresso dai vincoli di conservazione imposti al sistema, vincoli che condizionano il processo del trasporto radiativo perchè influiscono sui coefficienti delle relative equazioni. Cercheremo di mettere in luce la dipendenza dei coefficienti del trasporto dalle condizioni di conservazione, tenendo presente sin d'ora che la soluzione del problema delle atmosfere stellari richiederà di *esplicitare* in qualche maniera tale dipendenza *implicita*.

Dal punto di vista matematico, l'accoppiamento delle equazioni del trasporto individuali per i singoli raggi si tradurrà, come vedremo, nella trasformazione di una serie di problemi con una condizione iniziale assegnata in un punto del sistema in un problema globale di condizioni al contorno.

3.1 Formulazione dell'equazione TR

Nella § 1.2.1 abbiamo messo in evidenza la relazione che intercorre tra la funzione di distribuzione dei fotoni (descrizione cinetica) e l'intensità specifica del campo di radiazione (descrizione macroscopica), ed abbiamo anticipato che sarà quindi possibile applicare alla seconda i procedimenti propri della Teoria Cinetica.

Per la seconda ipotesi radiometrica, l'energia radiativa trasportata dal raggio (\mathbf{n}, ν) è una quantità estensiva, rappresentata nel modello fluidodinamico da una grandezza continua. Per essa imporremo una legge di conservazione, che si traduce in una *equazione della continuità*: in ogni istante la variazione totale dell'energia radiativa trasportata nel punto $P(\equiv \mathbf{r})$ dovrà essere eguale al bilancio tra i guadagni e le perdite che il raggio (\mathbf{n}, ν) sperimenta, come risultato della sua interazione con la materia nell'intorno del punto P :

$$\frac{dI}{dt} = \left[\begin{array}{c} \text{termine} \\ \text{di} \\ \text{creazione} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{termine} \\ \text{di} \\ \text{distruzione} \end{array} \right], \quad (3.1)$$

dove con dI/dt si indica la derivata totale dell'intensità specifica. La relazione (3.1) rappresenta un'equazione cinetica per il trasporto dei fotoni (equazione di Boltzmann). Il suo membro di destra, qui non ancora specificato, corrisponde all'operatore collisionale.

La derivata totale dell'intensità specifica $I(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t)$, scritta in funzione del momento \mathbf{p} dei fotoni, assume la forma esplicita

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) = \\ \frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) + \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} I(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} I(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Poichè nel caso che stiamo considerando la velocità $\mathbf{v} = c \mathbf{n}$ dei fotoni corrispondenti ad un dato raggio (\mathbf{n}, ν) è costante per la prima ipotesi radiometrica, il terzo termine del membro di sinistra dell'eq. (3.2) sarà per noi nullo.

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z) , il vettore posizione sarà espresso da $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Lo sviluppo formale del gradiente $\partial/\partial\mathbf{r}$ dell'intensità specifica, scritta ora in termini di \mathbf{n} e ν , porgerà

$$\frac{d}{dt} I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) = \frac{\partial}{\partial t} I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) + c \left[n_x \frac{\partial}{\partial x} I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) + n_y \frac{\partial}{\partial y} I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) + n_z \frac{\partial}{\partial z} I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \right], \quad (3.3)$$

dove n_x , n_y ed n_z sono i coseni direttori della direzione \mathbf{n} nel sistema di riferimento (x, y, z) .

Arriviamo così a formulare, in termini dell'intensità specifica $I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$, l'**equazione del trasporto radiativo** (TR):

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + c \mathbf{n} \cdot \nabla I = \begin{bmatrix} \text{termine} \\ \text{di} \\ \text{creazione} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{termine} \\ \text{di} \\ \text{distruzione} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

L'operatore collisionale, che descrive il bilancio tra la creazione e la distruzione fotoni, deve ora essere specificato nei termini delle grandezze macroscopiche introdotte nel capitolo precedente.

Durante l'intervallo di tempo dt , l'energia radiativa di frequenza ν che attraversa una superficie unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione \mathbf{n} riempie un volume $dV = c \cdot dt$. Il materiale contenuto dentro il volume dV emette lungo la direzione \mathbf{n} una quantità di energia $dE_\nu^+(\mathbf{n}) = \eta_\nu c dt$. Tale risultato discende dalla definizione del coefficiente di emissione η_ν data in § 1.3.2. L'energia $dE_\nu^+(\mathbf{n})$ si somma (III ipotesi radiometrica) a quella trasportata dal raggio, e rappresenta quindi l'incremento di energia del raggio (\mathbf{n}, ν) nell'intervallo di tempo dt . Pertanto, il termine di creazione risulterà essere

$$\begin{bmatrix} \text{termine} \\ \text{di} \\ \text{creazione} \end{bmatrix} = \frac{dE_\nu^+(\mathbf{n})}{dt} = \eta_\nu c. \quad (3.5)$$

L'analisi dimensionale porge $[\eta_\nu c] = MT^{-3}$, per una quantità le cui unità *cgs* sono $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{hz}^{-1}$. Tale risultato è consistente con le dimensioni del primo membro dell'eq. (3.4): $[dI/dt] = MT^{-3}$.

Per quanto riguarda il termine di distruzione, in base alla definizione del coefficiente di attenuazione data nella § 1.3.3, la perdita di energia radiativa risulta essere eguale a

$$dE_\nu^-(\mathbf{n}) = \chi_\nu I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) c dt, \quad (3.6)$$

dove abbiamo tenuto in conto che lo spostamento ds lungo la direzione \mathbf{n} è in questo caso pari alla lunghezza $c dt$. Otterremo quindi

$$\left[\begin{array}{c} \text{termine} \\ \text{di} \\ \text{distruzione} \end{array} \right] = \frac{dE_\nu^-(\mathbf{n})}{dt} = \chi_\nu I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) c. \quad (3.7)$$

Si verifica immediatamente la consistenza dimensionale del termine di distruzione, le cui dimensioni ed unità di misura sono evidentemente le stesse di quelle del termine di creazione.

Possiamo a questo punto scrivere finalmente l'equazione del trasporto radiativo in una forma *operativa*, che sarà convenientemente espressa come

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} I_\nu(\mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{n}) = -\chi_\nu I_\nu(\mathbf{n}) + \eta_\nu. \quad (3.8)$$

Il termine I_ν/c è la densità dell'energia $e_\nu(\mathbf{n})$ trasportata dal raggio (\mathbf{n}, ν) , definita come

$$e_\nu(\mathbf{n}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta E_\nu(\mathbf{n})}{\Delta V} = \frac{I_\nu(\mathbf{n})}{c}. \quad (3.9)$$

Quindi il primo termine del membro di sinistra dell'eq. (3.8) esprime la variazione temporale della densità dell'intensità specifica nel punto \mathbf{r} .

Nel secondo termine si riconosce la derivata direzionale $d/ds \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla$ dell'intensità specifica $I_\nu(\mathbf{n})$ lungo la direzione \mathbf{n} (Il parametro s misura la posizione del punto $P \equiv \mathbf{r}$ sulla retta individuata dal versore \mathbf{n} .)

Nel seguito ci occuperemo solamente di problemi stazionari e pertanto, d'ora in avanti, ci dimenticheremo del termine $\partial I_\nu/\partial t$. L'equazione del trasporto radiativo assumerà sempre per noi la forma

$$\frac{dI_\nu(\mathbf{n})}{ds} = -\chi_\nu I_\nu(\mathbf{n}) + \eta_\nu. \quad (3.10)$$

Ci siamo così ricondotti ad un'equazione differenziale per l'intensità specifica $I_\nu(\mathbf{n})$, equazione caratterizzata dai coefficienti del trasporto χ_ν ed η_ν ¹.

Se i coefficienti del trasporto sono dati, la struttura matematica dell'eq. (3.10) risulta essere quella di un' *equazione differenziale lineare del primo ordine*, la cui soluzione richiede una *condizione iniziale*, stabilita dal valore dell'intensità specifica $I_\nu(\mathbf{n})$ assegnato in un punto P_0 sulla retta di versore \mathbf{n} .

3.2 L'equazione TR in geometria piano - parallela

3.2.1 La geometria piano - parallela

Sempre coerenti con il nostro principio di considerare quei casi paradigmatici che permettono il massimo delle semplificazioni, pur conservando la fisica essenziale del problema, ci limiteremo in questa sede allo studio dell'equazione TR in un'atmosfera stellare che possa essere descritta da una geometria piano - parallela. Un'atmosfera cioè, che non solamente goda della proprietà di simmetria sferica, usualmente ammessa in fisica stellare, ma sia anche caratterizzata da proprietà fisiche tali che il valore del cammino libero medio dei fotoni al suo interno risulti molto più piccolo di quello del suo raggio.

In tali condizioni, la struttura geometrica dell'atmosfera potrà essere rappresentata da una successione di piani paralleli, orientati in modo da risultare perpendicolari alla linea di visuale che congiunge la stella con un osservatore esterno. Data tale configurazione, sarà naturale associare alla struttura geometrica così definita un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, il cui asse z (di versore \mathbf{k}) risulti parallelo alla linea di visuale, ed orientato verso l'osservatore. La simmetria sferica, assunta per le proprietà fisiche dell'atmosfera, si traduce in una condizione di *omogeneità laterale* per la struttura adottata. Si avrà, inoltre, simmetria azimutale attorno all'asse z .

Se consideriamo ora l'equazione del trasporto nella geometria appena definita, come conseguenza dell'omogeneità laterale le derivate parziali $\partial I_\nu(\mathbf{n})/\partial x$ e $\partial I_\nu(\mathbf{n})/\partial y$ saranno nulle. Definito il coseno direttore n_z come

¹I coefficienti del trasporto dipendono, in generale, dalla direzione considerata. Noi però, al fine di semplificare la trattazione, abbiamo già deciso di considerare (v. Capitolo 1, § 1.2) solamente casi nei quali sia le proprietà del materiale, sia i processi di diffusione, si possono considerare *isotropi*. Trascureremo inoltre, nella grande maggioranza dei casi, il fenomeno dell'emissione indotta.

$$n_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = \cos \theta \equiv \mu, \quad (3.11)$$

l'eq. (3.10) diventa

$$\mu \frac{dI_\nu(z; \mu)}{dz} = -\chi_\nu(z) I_\nu(z; \mu) + \eta_\nu(z). \quad (3.12)$$

E' evidente che, per la simmetria assiale del problema, sarà sufficiente studiare l'eq. (3.12) nel piano individuato dai versori \mathbf{k} ed \mathbf{n} .

3.2.2 Intensità emergenti ed incidenti

Avremo un'equazione TR, nella forma data dall'eq. (3.12), per ognuna delle infinite direzioni orientate \mathbf{n} che giacciono nel piano individuato dai versori \mathbf{k} ed \mathbf{n} . L'angolo θ , definito dal prodotto scalare $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$, sarà il parametro che individuerà ciascuna di esse.

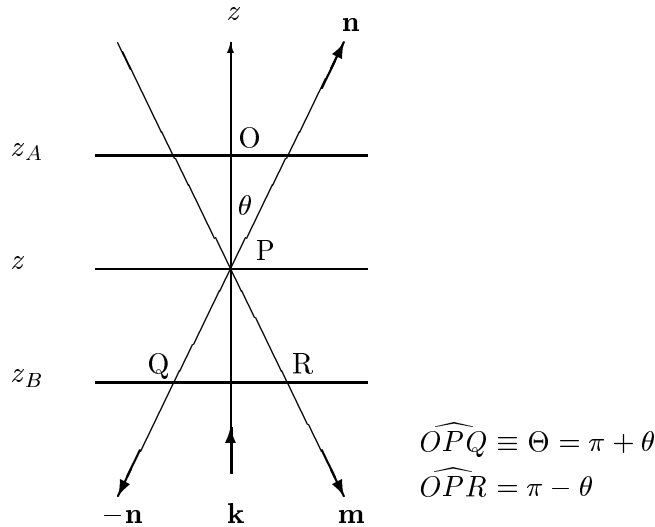


Figura 3.1: La geometria piano-parallela

In effetti, per le proprietà di simmetria assunte, l'intensità specifica del campo di radiazione che si propaga lungo una direzione orientata $-\mathbf{n}$, che formi con l'asse z un angolo $\widehat{OPQ} \equiv \Theta$, compreso tra π e 2π , sarà eguale a quella che si propaga lungo la direzione \mathbf{m} , che forma con l'asse z l'angolo $\widehat{OPR} = \pi - \theta$, dove θ è l'angolo formato con l'asse z dalla direzione orientata opposta a quella considerata inizialmente. (Si veda la Fig. 3.1.) Questo

permette di restringere lo studio dell'eq. (3.12) alle direzioni orientate \mathbf{n} che formano con \mathbf{k} un angolo $0 \leq \theta \leq \pi$. La generica direzione orientata \mathbf{n} rimane univocamente determinata dal valore del relativo parametro μ , quando questo assume tutti i possibili valori compresi tra -1 ed 1, con l'eccezione del valore singolare corrispondente all'angolo $\theta = \pi/2$.

La simmetria laterale del problema permette però un'ulteriore semplificazione. Abbiamo visto che l'intensità $I_\nu(z; \mathbf{m})$ è eguale a $I_\nu(z; -\mathbf{n})$. Potremo quindi considerare le sole *direzioni* (non più le *direzioni orientate*), per le quali vale $0 \leq \theta < \pi/2$, purchè siano considerate con il *verso adeguato*. Se ridefiniamo il parametro μ come

$$\mu \equiv |\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}| \geq 0, \quad (3.13)$$

l'insieme dei valori $0 < \mu \leq 1$ individuerà univocamente tutte le direzioni del quadrante con $0 \leq \theta < \pi/2$, esclusa quella perpendicolare all'asse z . Potremo allora definire due famiglie di intensità specifiche: le *intensità emergenti*

$$I_\nu^+(z; \mu) \equiv I_\nu(z; \mathbf{n}); \quad \mu = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} > 0, \quad (3.14)$$

e le *intensità incidenti*

$$I_\nu^-(z; \mu) \equiv I_\nu(z; -\mathbf{n}); \quad \mu = \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{n}) < 0, \quad (3.15)$$

che si propagano nei due *versi opposti* lungo la medesima direzione.

Per le due famiglie di intensità specifiche, dovremo scrivere le corrispondenti equazioni TR. Avremo, per ognuna delle infinite direzioni del quadrante $0 \leq \theta < \pi/2$, una coppia di equazioni: una per ciascun verso di percorrenza del parametro $s = z/\mu$ della derivata direzionale lungo la retta individuata dal parametro μ . Quella per le intensità emergenti sarà

$$\mu \frac{dI_\nu^+(z; \mu)}{dz} = -\chi_\nu(z) I_\nu^+(z; \mu) + \eta_\nu(z); \quad (3.16)$$

quella per le intensità incidenti

$$-\mu \frac{dI_\nu^-(z; \mu)}{dz} = -\chi_\nu(z) I_\nu^-(z; \mu) + \eta_\nu(z). \quad (3.17)$$

(Forse non sarà superfluo ricordare che stiamo qui considerando i coefficienti χ_ν ed η_ν come isotropi.)

3.2.3 Localizzazione delle condizioni iniziali

Siano z_A e z_B le coordinate dei due piani che delimitano l'atmosfera stellare. Per come abbiamo introdotto il sistema di riferimento associato alla struttura geometrica, il piano z_A identifica la superficie dell'atmosfera, quello z_B la profondità massima presa in considerazione. Dalla scelta fatta per l'orientazione dell'asse z , segue che $z_A > z_B$. (Si veda la Fig. 3.1.)

Nel momento di considerare l'evoluzione dei singoli raggi (\mathbf{n}, ν) , appare manifesta in modo naturale una discriminazione tra quelli per cui il prodotto scalare $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$ è positivo, e quelli per cui è negativo. I primi saranno raggi che escono dalla superficie z_A (e saranno "visti" dall'osservatore), i secondi entreranno nell'atmosfera attraverso la superficie z_B . Resta così giustificata la scelta degli aggettivi emergente ed incidente per le due famiglie $I_\nu^+(z; \mu)$ ed $I_\nu^-(z; \mu)$ delle intensità specifiche associate ai raggi corrispondenti. Tale discriminazione, conseguenza di una proprietà intrinseca dei singoli raggi, si riflette nella determinazione delle condizioni iniziali per i valori delle corrispondenti intensità specifiche. Per evidenti ragioni fisiche, le condizioni iniziali per le intensità $I_\nu^+(z; \mu)$ saranno assegnate per $z = z_B$, quelle per le intensità $I_\nu^-(z; \mu)$ per $z = z_A$.

Le condizioni iniziali costituiscono un insieme di *dati*, essenziali per la soluzione del problema del trasporto radiativo. La particolare struttura geometrica del del problema considerato fa sì che la relativa informazione sia conosciuta in *due punti distinti* del sistema fisico studiato.

Nel seguito (v. § 3.4) vedremo che le equazioni TR individuali sono legate tra loro per la fisica del problema globale. Possiamo quindi già qui anticipare un'importante conclusione di carattere matematico. La soluzione del problema del trasporto radiativo implicherà quella del sistema formato dall'insieme (virtualmente infinito) di tutte le equazioni TR specifiche (una per ogni direzione \mathbf{n}). Poichè le relative condizioni iniziali sono assegnate in due punti distinti, non sarà più questione, in termini matematici, di una serie di problemi alle *condizioni iniziali*, ma di un problema di *condizioni al contorno*.

3.3 Funzione sorgente e profondità ottica

Lo studio dell'equazione del trasporto radiativo risulta semplificato dall'introduzione di due quantità, intrinsecamente legate ai coefficienti del trasporto: la *funzione sorgente* e la *profondità ottica*.

Definiremo *funzione sorgente* il rapporto

$$\frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} \equiv S_\nu , \quad (3.18)$$

che esprime una relazione generale tra i coefficienti di emissione e di assorbimento. In condizioni di ET (o di ETL) l'eq. (3.18) si riconduce alla legge di Kirchhoff

$$\frac{\eta_\nu^*}{\alpha_\nu^*} = B_\nu(T) . \quad (3.19)$$

Nel caso generale di un mezzo anisotropo la dipendenza di η_ν e χ_n dalla direzione \mathbf{n} si rifletterà in una funzione sorgente anisotropa $S = S(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$.

E' utile introdurre a questo punto la nozione di *profondità ottica* (monocromatica), per mezzo della definizione

$$d\tau_\nu(\mathbf{n}) = -\chi_\nu(s) ds(\mathbf{n}) , \quad (3.20)$$

dove con $s(\mathbf{n})$ si intende uno spostamento di lunghezza ds lungo la direzione \mathbf{n} .

E' evidente il significato fisico della profondità ottica. Se un raggio di intensità $I_\nu(\mathbf{n})$ attraversa perpendicolarmente uno strato di spessore geometrico ds , che solo attenua la radiazione secondo il coefficiente χ_ν , il decremento dell'intensità specifica del raggio sarà espressa da

$$\frac{dI_\nu(s; \mathbf{n})}{ds} = -\chi_\nu(s) I_\nu(s; \mathbf{n}) . \quad (3.21)$$

Per la definizione di $\tau_\nu(\mathbf{n})$, data dall'eq. (3.20), l'eq. (3.21) diventa

$$\frac{dI_\nu[\tau_\nu(\mathbf{n}); \mathbf{n}]}{d\tau_\nu(\mathbf{n})} = I_\nu(\mathbf{n}) , \quad (3.22)$$

la cui immediata soluzione è data da

$$I_\nu[\tau_\nu(\mathbf{n}); \mathbf{n}] = I_{0\nu}(\mathbf{n}) e^{-\Delta\tau_\nu(\mathbf{n})} , \quad (3.23)$$

dove $\Delta\tau_\nu(\mathbf{n}) = \int_0^{\tau_\nu(\mathbf{n})} dt_\nu(\mathbf{n})$ rappresenta lo spessore ottico tra i punti P_0 , dove è assegnata la condizione iniziale $I_{0\nu}(\mathbf{n})$, e P , dove si calcola $I_\nu(s; \mathbf{n})$. Risulta evidente che uno strato di spessore ottico unitario attenua la radiazione incidente di un fattore $1/e$.

La definizione di profondità ottica permette di vedere che la funzione sorgente $S(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$ esprime l'energia monocromatica emessa per unità di

spessore ottico $\Delta\tau_\nu(\mathbf{n})$ lungo la direzione \mathbf{n} in un intorno del punto $P(\equiv \mathbf{r})$.

Nei termini delle due nuove quantità, per ogni direzione \mathbf{n} l'equazione TR, espressa originariamente dall'eq. (3.12), diventa

$$\mu \frac{d I_\nu [\tau_\nu(\mathbf{n}); \mathbf{n}]}{d \tau_\nu(\mathbf{n})} = I_\nu [\tau_\nu(\mathbf{n}); \mathbf{n}] - S_\nu [\tau_\nu(\mathbf{n})] , \quad (3.24)$$

dove μ è definito nella forma usuale.

3.4 Il sistema delle equazioni TR

3.4.1 Natura non-locale e non-lineare del trasporto radiativo

Vogliamo chiarire in questa sezione quanto già anticipato in precedenza: il problema del trasporto radiativo, nella sua formulazione generale, è un problema **non-locale** e **non-lineare**, che coinvolge un insieme di grandezze fisiche che devono tener in conto l'aspetto direzionale e la distribuzione spettrale dell'energia radiativa. Ogni *modo* specifico della radiazione (cioè la radiazione monocromatica che si propaga lungo una direzione, *i.e.* un *raggio*) resta individuato dalla coppia di parametri (\mathbf{n}, ν) .

I coefficienti del trasporto, che caratterizzano ogni specifica equazione TR, rappresentano proprietà *locali* del mezzo. I loro valori però non potranno in generale essere considerati come noti. Al contrario, già sappiamo che sono fissati dalla soluzione del problema globale delle atmosfere stellari, formulato in termini di un sistema costituito dalle equazioni per lo stato fisico della materia e da quelle per il trasporto radiativo, accoppiate tra loro.

L'influenza del trasporto radiativo sui relativi coefficienti implica che i loro valori in un punto dato saranno condizionati dalle proprietà fisiche negli altri punti del mezzo, dove sono stati generati i fotoni che vengono ad interagire con la materia nel punto preso in esame. Il problema risulta così essere un problema *non-locale*.

Il legame fisico tra il campo di radiazione ed il mezzo materiale, che si esercita attraverso i coefficienti di attenuazione ed emissione, si riflette in modo essenziale sulla *struttura matematica* dell'equazione del trasporto radiativo. Con l'aiuto di alcuni casi paradigmatici particolarmente illustrativi, vedremo nella prossima sezione di esplicitare la dipendenza dei coefficienti del trasporto dal campo di radiazione. Tale legame fisico può essere dovuto a meccanismi sia *interni* al processo del trasporto radiativo, sia *esterni* ad

esso. La natura dei distinti meccanismi potrà essere tale da conservare la struttura *lineare* dell'equazione TR, oppure da renderla *non-lineare*.

Il carattere globale del trasporto radiativo si traduce, dal punto di vista matematico, in un *sistema di equazioni*, nel quale ogni singola equazione TR, corrispondente cioè ad un modo individuale (\mathbf{n}, ν) , conterrà nel suo termine sorgente le intensità specifiche relative a *tutti* gli altri modi (\mathbf{n}', ν') .

3.4.2 L'accoppiamento delle equazioni TR

L'equazione TR, data dall'eq. (3.12), o alternativamente dall'eq. (3.24), è un'equazione specifica per il modo (\mathbf{n}, ν) , che resta caratterizzata dai suoi coefficienti: $\chi_\nu = a_\nu + \sigma_\nu$ per l'attenuazione (cf. eq. [1.33]), ed $\eta_\nu = \eta_\nu^{Te} + \eta_\nu^D$ per l'emissione (cf. eq. [1.29]). La fisica di ogni problema particolare determinerà la natura dei coefficienti del trasporto, ed attraverso questi ultimi, la struttura della funzione sorgente.

Studieremo dapprima il caso particolare di un sistema fisico, la cui componente materiale si trovi in condizioni di equilibrio termodinamico locale (ETL). In tali circostanze, per l'eq. (3.19), il termine di emissione η_ν^{Te} sarà pari a $a_\nu^* B_\nu(T)$. Poteremo allora scrivere la funzione sorgente nella forma

$$S_\nu = \left[a_\nu^* B_\nu(T) + \sigma_\nu \oint I_\nu(\mathbf{n}') \frac{d\Omega'}{4\pi} \right] / (a_\nu^* + \sigma_\nu) , \quad (3.25)$$

dove abbiamo usato l'eq. (1.27) per esprimere il contributo η_ν^D dei processi di diffusione all'emissione totale. L'eq. (3.25) mostra chiaramente che la funzione sorgente consta di due distinte componenti: il primo termine nel numeratore rappresenta il contributo termico all'emissione dei fotoni, ed è il risultato di un processo *locale*. Il secondo include un integrale di diffusione, che somma tutte le intensità specifiche del campo di radiazione, e rende conto quindi del trasporto radiativo, che è un processo *non-locale*.

Per l'ipotesi fatta di ETL, i coefficienti del trasporto non dipendono dal campo di radiazione, ma solamente dalla temperatura. Non sono quindi influenzati in *forma diretta* dal trasporto radiativo.

Andiamo ora a considerare due situazioni limite.

a) *Pura diffusione.*

Sotto tale ipotesi, sarà $a_\nu^* = 0$, e pertanto l'equazione TR, nella variabile indipendente τ_ν (cf. eq. [3.24]), si scriverà

$$\mu \frac{dI_\nu(\mathbf{n})}{d\tau_\nu(\mathbf{n})} = I_\nu(\mathbf{n}) - \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu(\mathbf{n}') d\Omega' . \quad (3.26)$$

La forma dell'eq. (3.26) mostra chiaramente come nella funzione sorgente dell'equazione TR per il modo (\mathbf{n}, ν) siano accoppiate tutte le intensità specifiche $I_\nu(\mathbf{n}')$, corrispondenti a tutte le direzioni \mathbf{n}' che devono essere prese in considerazione per la soluzione del problema ².

Vogliamo far risaltare che l'accoppiamento è formulato nei termini di un *operatore lineare*, l'integrale di diffusione, che traduce matematicamente l'operazione fisica di sommare raggi lungo differenti direzioni, giustificata dalla terza ipotesi radiometrica. Abbiamo quindi un caso di accoppiamento *lineare*. Per quanto riguarda il meccanismo fisico che causa l'accoppiamento, l'*unico* agente che entra in gioco è il campo di radiazione. Si tratta quindi di un meccanismo che potremo definire *interno* al processo del trasporto radiativo.

b) *Puro assorbimento.*

Ora sarà $\sigma_\nu = 0$, e l'equazione TR si scriverà

$$\mu \frac{dI_\nu(\mathbf{n})}{d\tau_\nu(\mathbf{n})} = I_\nu(\mathbf{n}) - B_\nu(T) . \quad (3.27)$$

La funzione sorgente in questo caso è data dalla funzione di Planck $B_\nu(T)$, e dipende quindi direttamente dalla temperatura del mezzo. Se oltre all'ipotesi di ETL imponiamo che il sistema soddisfi la condizione dell'equilibrio radiativo (ER), la temperatura del materiale dovrà verificare l'equazione ER:

$$\int_0^\infty a_\nu^*(T) J_\nu d\nu = \int_0^\infty a_\nu^*(T) B_\nu(T) d\nu . \quad (3.28)$$

La condizione dell'equilibrio radiativo implica l'eguaglianza tra i processi di assorbimento della radiazione e quelli di emissione termica. E' questo il meccanismo che porta all'accoppiamento dei modi specifici del trasporto radiativo. Poichè si tratta di un vincolo imposto al processo del trasporto radiativo dalle condizioni fisiche del mezzo, sarà giustificato considerarlo come un meccanismo *esterno*. Vogliamo sottolineare come il vincolo sia in questo

²Nella pratica risulta sempre possibile sostituire l'integrale sulle infinite direzioni virtualmente necessarie, con una opportuna somma pesata di un numero finito, e generalmente piccolo di direzioni (metodo delle ordinate discrete).

caso esprimibile per mezzo di una unica legge di conservazione globale: l'eq. (3.28).

Vedremo in dettaglio nella § 5.2.3 il modo di esplicitare la temperatura a partire dall' eq. (3.28). Qui ci preme soltanto far presente che il valore della funzione sorgente di ogni equazione TR specifica è determinato univocamente da quello della temperatura. Quindi tutte le equazioni TR specifiche risulteranno qui accoppiate attraverso il valore T della temperatura.

Più avanti (nel Capitolo 5) introdurremo una forma dell'equazione TR che includa la condizione dell'equilibrio radiativo nella funzione sorgente:

$$\mu \frac{dI_\nu(\mathbf{n})}{d\tau_\nu(\mathbf{n})} = I_\nu(\mathbf{n}) - \left[f_1(T) + f_2(T) \int_0^\infty a_\nu^*(T) J_\nu d\nu \right]. \quad (3.29)$$

Come vedremo nella § 5.2.3, le quantità f_1 ed f_2 , così come il coefficiente di assorbimento a_ν^* , sono funzioni della temperatura T , però risultano dipendere debolmente da questa. L'accoppiamento di tutte le intensità specifiche si realizza, dal punto di vista matematico, attraverso l'integrale $J_a \equiv \int a_\nu^* J_\nu d\nu$, che esprime dal punto di vista fisico l'energia radiativa totale assorbita dal mezzo. (Si osservi che l'integrale J_a è formalmente analogo ad un integrale di diffusione.)

Mentre l'integrale J_a è lineare nelle intensità specifiche, il fatto che i valori di a_ν^* , f_1 ed f_2 dipendano, attraverso la temperatura, da quelli delle intensità specifiche, introduce una *non-linearità* nell'accoppiamento. Vedremo comunque nel seguito che tale dipendenza non influisce in misura determinante sui valori di a_ν^* , f_1 ed f_2 . Con un linguaggio che sarà introdotto e giustificato nella § 5.2.3, chiameremo questo accoppiamento come *debolmente non-lineare*.

Considereremo ora un ulteriore caso di di grande interesse.

c) Caso dell'atomo con due livelli

Abbiamo già definito il problema nella § 2.5.1. Nel contesto della presente discussione, il caso dell'atomo con due livelli assume una particolare importanza, perchè rappresenta il paradigma del trasporto radiativo in una situazione di non-ETL.

Per semplificare il discorso, assumiamo che il profilo di assorbimento $\varphi(\nu)$ e quello di emissione $\psi(\nu)$ siano eguali (caso della ridistribuzione completa). Se, come è consuetudine, inglobiamo l'emissione indotta nel coefficiente di assorbimento, come se fosse un assorbimento negativo, il relativo coefficiente prenderà la forma

$$\chi_\nu = \frac{h\nu_{jk}}{4\pi} (n_j B_{jk} - n_k B_{kj}) \varphi(\nu). \quad (3.30)$$

Il termine di emissione terrà in conto solamente l'emissione spontanea, e si scriverà

$$\eta_\nu = \frac{h\nu_{jk}}{4\pi} n_k A_{kj} \varphi(\nu). \quad (3.31)$$

(La notazione è qui quella usuale, che già abbiamo impiegato nel Capitolo 2.) La funzione sorgente risulterà essere allora

$$S_{jk} = \frac{n_k A_{kj}}{n_j B_{jk} - n_k B_{kj}}. \quad (3.32)$$

Scritta in questa forma, la funzione sorgente S_{jk} è espressa in termini della densità delle popolazioni n_j ed n_k dei due livelli. L'ipotesi di stazionarietà, che imporremo al sistema, si traduce nell'unica equazione dell'equilibrio statistico per i due livelli (cf. eq. [2.42]):

$$\begin{aligned} n_j \left[B_{jk} \int_0^\infty \varphi(\nu) J_\nu d\nu + C_{jk} \right] = \\ n_k \left[A_{kj} + B_{kj} \int_0^\infty \varphi(\nu) J_\nu d\nu + C_{kj} \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nel caso particolare dell'atomo con due livelli, l'esistenza di una *unica* legge di conservazione permette di esprimere *esplicitamente* il rapporto n_j/n_k in funzione dei coefficienti atomici, radiativi e collisionali, e del campo di radiazione attraverso l'integrale $\int \varphi(\nu) J_\nu d\nu$. Per sostituzione nell'eq. (3.33), con opportuni passaggi algebrici che tengono in conto le relazioni esistenti tra i coefficienti di Einstein e tra i coefficienti collisionali, si ottiene

$$S_{jk} = \frac{\int_0^\infty \varphi(\nu) J_\nu d\nu + \varepsilon B_\nu}{1 + \varepsilon}, \quad (3.34)$$

dove B_ν è la funzione di Planck (il cui valore in questo caso consideremo come noto) ed il parametro ε è definito come

$$\varepsilon \equiv \frac{C_{kj}}{A_{kj}} \left(1 - e^{h\nu_{jk}/kT} \right). \quad (3.35)$$

L'accoppiamento delle intensità specifiche nella funzione sorgente è ora il risultato di un meccanismo *esterno*: la legge della conservazione delle popolazioni dei due livelli, esprimibile nel caso dell'atomo a due livelli per mezzo di una unica condizione esplicita.

Dal punto di vista fisico, il meccanismo consiste nell'insieme dei processi radiativi e collisionali, che implicano assorbimento di energia da parte degli atomi, e riemissione della stessa. Quindi, per la definizione che ne abbiamo dato nella § 1.3.1, non entrano in gioco in questo caso processi di diffusione. Ciò nonostante, la funzione sorgente, espressa dall'eq. (3.34), contiene l'integrale $\int \varphi(\nu) J_\nu d\nu$, formalmente analogo ad un integrale di diffusione. La dipendenza dal campo di radiazione della funzione sorgente per l'atomo a due livelli è quindi espressa da un operatore lineare. La conclusione è che siamo di fronte ad un caso di meccanismo *lineare esterno*.

d) Caso dell'atomo con molti livelli

Nel caso di un atomo con più di due livelli energetici, la condizione di stazionarietà per le popolazioni atomiche, che costituisce il meccanismo *esterno* dal quale sono fissati globalmente i valori dei coefficienti del trasporto, è espressa da un *insieme* di leggi di conservazione. I valori delle popolazioni, dai quali derivano quelli dei coefficienti del trasporto radiativo nelle equazioni TR, saranno determinati dalla soluzione del sistema delle equazioni dell'equilibrio statistico (sistema EES).

Il sistema EES, costituito dalle equazioni che abbiamo esplicitato nell'eq. (2.42), ha una struttura lineare nelle sue incognite, cioè i valori delle popolazioni atomiche. Però i coefficienti che moltiplicano le incognite dipendono dalla temperatura attraverso i valori delle probabilità collisionali C_{ij} , e dal campo di radiazione per mezzo degli integrali \bar{J}_{ij} (cf. eq. [2.28]). I valori dei coefficienti sono quindi condizionati dalla soluzione delle equazioni TR, e pertanto la struttura globale del problema risulta *non-lineare*.

Il seguente quadro sinottico ricapitola i meccanismi e le strutture che siamo andati definendo, associandoli ai rispettivi problemi paradigmatici.

problema	meccanismo	struttura	<i>legge di conservazione</i>
solo diffusione	interno	lineare	
temperatura in ER	<i>esterno</i>	non-lineare	<i>unica relazione globale</i>
atomo due livelli	<i>esterno</i>	lineare	<i>relazione unica</i>
atomo molti livelli	<i>esterno</i>	non-lineare	<i>insieme di condizioni</i>

Tabella 3.1: Meccanismi di accoppiamento delle equazioni TR

Capitolo 4

Descrizione di un'atmosfera stellare

4.1 Il sistema fisico "atmosfera stellare"

Una definizione di stella, correntemente in uso, è quella di una concentrazione aperta di materia ed energia. Che cosa si intende con questo? Quanto segue vuole darne la spiegazione, e costituisce la necessaria premessa all'introduzione della problematica delle atmosfere stellari.

Partiremo dal fatto sperimentale basico che vediamo la luce emessa dalle stelle. Il flusso di radiazione emergente, che possiamo raccogliere e misurare, implica una concentrazione di energia, che viene irradiata e rinnovata da una fonte interna che compensa l'energia luminosa emessa. L'ulteriore evidenza osservativa che le stelle generano intensi campi gravitazionali porta alla conclusione che le stelle sono concentrazioni di una grande quantità di materia.

Abbiamo poi fondate ragioni, basate su fatti sperimentali, per ritenere che le stelle esistano per un lunghissimo periodo di anni. Questo presuppone una struttura stabile, almeno per larghi intervalli di tempo. La stabilità della struttura globale induce a postulare una condizione di equilibrio tra forze attrattive e forze repulsive dentro le stelle.

E' logico aspettarsi che la distribuzione spettrale della radiazione elettromagnetica osservata abbia origine negli strati più esterni, da dove i fotoni sono in grado di lasciare la stella. Come già detto nel Cap. I, noi chiamiamo *atmosfera stellare* l'insieme di tali strati, che rappresentano una *frontiera aperta* tra l'interno della stella ed il mezzo interstellare, e costituiscono l'unica parte della stella accessibile all'osservazione diretta.

L'insieme delle osservazioni spettrofotometriche, accompagnato da considerazioni generali sulla natura e le proprietà delle stelle, permette una descrizione quantitativa del sistema fisico "atmosfera stellare", cioè la determinazione della sua struttura in termini di opportune variabili fisiche; in altre parole, la costruzione di un *modello* di atmosfera stellare.

Innanzitutto, vi è il fatto osservativo primario che lo spettro di un'atmosfera stellare ha le caratteristiche di quello di un plasma. Poi, è ragionevole assumere che le proprietà globali dell'atmosfera siano determinate dai parametri stellari fondamentali: massa, raggio e luminosità.

Detto questo, per essere in grado di calcolarne un modello, saranno necessarie alcune ipotesi specifiche circa le proprietà delle atmosfere stellari, ipotesi che in generale saranno accettabili semplificazioni della realtà fisica che immaginiamo.

Innanzitutto, d'accordo con l'idea che una stella è una massa di gas autogravitante, ammetteremo che gli strati più esterni abbiano una forma sferica. Questa ipotesi, assieme a quella di omogeneità per i singoli strati, permette di considerare tutte le variabili e le funzioni impiegate per la descrizione della struttura come dipendenti dalla sola distanza radiale.

Un'ulteriore ipotesi semplificativa è quella di *stazionarietà* del sistema. Nonostante l'evidenza di fenomeni di variabilità su scale di tempi dell'ordine che vanno dai minuti agli anni, l'esistenza del diagramma di Hertzsprung-Russell e la sua interpretazione in base all'evoluzione stellare la rendono valida, almeno in prima approssimazione.

A questo punto, abbiamo davanti un quadro fenomenologico completo per tentare la descrizione della struttura del sistema.

La condizione di stazionarietà impone l'equilibrio tra le forze, interne ed esterne, che agiscono sulle particelle: una forza attrattiva esterna, la gravitazione, deve esser bilanciata da forze espansive, dovute alla pressione del gas e (quando sia il caso) alla pressione di radiazione. Quindi, dal punto di vista *meccanico*, il sistema risulta *globalmente* in equilibrio. Peraltro, tale equilibrio globale non esclude la possibilità che, per determinati valori della pressione e temperatura, si manifestino localmente instabilità convettive, che si traducono in moti macroscopici più o meno disordinati. La velocità media globale dei differenti elementi che partecipano a tali moti convettivi deve essere nulla, ma le loro velocità e proprietà termodinamiche individuali saranno distinte.

L'equilibrio meccanico globale esprime il fatto che la stella è confinata gravitazionalmente. Se trascuriamo, in prima approssimazione, il fenomeno di perdita di massa attraverso il vento stellare, dato che le condizioni fisiche all'interno dell'atmosfera non danno luogo a processi di creazione

o distruzione di materia, la massa totale del sistema si potrà considerare costante.

Analogamente, si presume che siano assenti nell'atmosfera fonti di produzione dell'energia. D'altra parte, la presenza di un flusso di radiazione implica l'esistenza di un fenomeno di trasporto per i fotoni e, di conseguenza, un'anisotropia del campo di radiazione. L'interazione, a livello microscopico, dei fotoni con le particelle del materiale si traduce, in termini macroscopici, in un *interscambio di energia tra il campo di radiazione ed il materiale stellare*. Per l'ipotesi di stazionarietà, la somma totale dell'energia interna del materiale e la densità di energia del campo di radiazione deve rimanere costante. Il risultante equilibrio del bilancio energetico globale si lega intrinsecamente con l'equilibrio meccanico: la quantità di energia interna determina la distribuzione della temperatura del materiale, e quindi delle altre variabili termodinamiche. Per altro, lo stato termodinamico del materiale determina a sua volta i valori dei coefficienti del trasporto radiativo, e quindi influisce sul bilancio energetico globale.

Il problema della determinazione della struttura sarà pertanto quello della descrizione della concentrazione locale di materia ed energia. A seconda delle necessità specifiche imposte dai singoli casi considerati, dovremo tenere in conto la descrizione microscopica, in termini delle equazioni cinetiche per le rivelanti funzioni di distribuzione, o sarà sufficiente quella macroscopica, in termini di una termodinamica di equilibrio o di non-equilibrio lineare.

4.2 Condizioni di equilibrio e struttura del sistema

Il modello che abbiamo introdotto per descrivere la materia contempla gradi di libertà *esterni*. Però il nostro modello assume anche una struttura interna per le particelle (ipotesi *semi-classica*), da cui la necessità di considerare la distribuzione dell'energia globalmente disponibile entro i distinti stati possibili del sistema. Questo implica introdurre gradi di libertà *microscopici interni*.

La "complessità" di un sistema è funzione del numero di gradi di libertà che questi possiede. Un problema fondamentale sarà quello di determinare il numero minimo di variabili necessarie (*variabili fondamentali*) per una descrizione *completa* del sistema considerato, siano esse riferite alla descrizione macroscopica (termodinamica) o microscopica (cinetica). L'informazione fisica supplementare fornita dall'assunzione di determinate condizioni di equilibrio per il particolare sistema studiato permette di stabilire

relazioni specifiche tra le variabili macroscopiche fondamentali (*equazioni di stato*), e quindi di ridurne il numero.

La struttura del sistema sarà descritta dai valori che in ogni punto assumono le variabili fondamentali, e questi ultimi resteranno determinati tenendo in conto le relazioni che intercorrono tra le variabili, i vincoli imposti dalle condizioni esterne ed il valore dell'energia interna del sistema. Tali relazioni saranno espresse in termini di leggi di conservazione ed equazioni di stato.

Quando però applichiamo questo quadro al sistema fisico "atmosfera stellare", non dobbiamo dimenticare il fatto fondamentale, implicito nella definizione stessa di atmosfera, che il nostro sistema è sede di un flusso di energia radiativa. Quindi l'equazione che esprime il bilancio energetico conterrà un termine almeno, il campo di radiazione, *che non può essere considerato in equilibrio*. Conseguentemente, l'insieme delle leggi di conservazione, equazioni di stato e condizione di bilancio energetico non sarà sufficiente per la trattazione matematica autoconsistente del problema. Dovremo supplementare le corrispondenti equazioni con un insieme di equazioni che descrivano i fenomeni di trasporto che possono tener luogo; sicuramente uno almeno: il *trasporto radiativo*. Al trasporto di energia radiativa può, in determinati casi, accompagnarsi quello di energia meccanica, dovuto a moti macroscopici del materiale (*convezione*).

4.3 Le equazioni fondamentali della teoria delle atmosfere stellari

Dobbiamo ora descrivere *quantitativamente* la struttura di un'atmosfera stellare, individuandone le variabili fondamentali, ed i legami che tra queste intercorrono. *La soluzione del sistema di equazioni che ne risulta, assieme alle opportune condizioni iniziali ed al contorno, ci fornirà il modello voluto.*

Le leggi di conservazione della massa e della quantità di moto ci offrono le prime due equazioni: *equazione della continuità* (scalare) ed *equazione del moto* (vettoriale), che legano tra loro la densità ρ , la pressione P e la velocità \mathbf{v} del materiale stellare.

Poichè si tratta di un sistema di *quattro* equazioni scalari per *cinque* incognite (ρ , P e le tre componenti di \mathbf{v}), dovremo cercare un'ulteriore equazione per chiudere il sistema. Se facciamo ricorso ad un'*equazione di stato* (nel caso ciò sia possibile), portiamo a cinque il numero delle equazioni, però le incognite diventano sei: dobbiamo tenere in conto anche la temperatura T .

Ci resta a disposizione la condizione di conservazione dell'energia, dalla quale possiamo ricavare l'*equazione del bilancio energetico*. Qui la temperatura gioca un ruolo fondamentale dal punto di vista fisico. Il problema è che nel bilancio energetico si deve tenere in conto anche l'energia corrispondente al campo di radiazione.

Per trattare quest'ultimo, faremo ricorso all'insieme di *equazioni del trasporto radiativo*, che fornisce i valori dell'intensità specifica $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}; \nu, t)$ necessari per la descrizione completa del campo di radiazione. In tale maniera possiamo finalmente chiudere il sistema.

Dal punto di vista matematico, il sistema che abbiamo così ottenuto risulta eterogeneo: le equazioni *costitutive* (i.e., le equazioni della continuità e del moto, e l'equazione di stato) legano tra loro quantità *locali*. Le prime due, in particolare, sono equazioni differenziali, le cui soluzioni saranno specificate dalle relative *condizioni iniziali*. Dal canto suo, l'equazione del bilancio energetico coinvolge una quantità, il campo di radiazione, che abbiamo visto non possiamo considerare in equilibrio. Per essere precisi, appare il *flusso della radiazione*, che dovrà essere descritto per mezzo della corrispondente equazione del trasporto radiativo. Quest'ultima lega la quantità "trasportata", *non locale*, con le relative sorgenti e pozzi, che sono quantità *locali*.

Inoltre, come abbiamo già visto nel Cap. 3, l'aspetto direzionale del trasporto radiativo mette in contatto localmente fasci di radiazione che sono rappresentati da equazioni differenziali, le cui condizioni iniziali sono assegnate in punti distinti del sistema materiale: il problema risulta così essere un *problema di condizioni al contorno*.

4.3.1 Le equazioni per la materia

L'equazione della continuità

Dalla condizione di *conservazione della massa*, è facile derivare l'equazione della continuità. La massa di fluido contenuta in un volume V che si stringe attorno ad un punto P sarà data da $\int_V \rho dV$, mentre la quantità di materia che fluisce nell' udt attraverso un elemento di superficie orientato $\mathbf{k}dS$ della superficie S che delimita V si può esprimere come $\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}dS$.

La conservazione della massa implica l'eguaglianza tra quest'ultima e la variazione di massa per udt :

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV . \quad (4.1)$$

L'applicazione della formula di Green ed il fatto che il volume V è arbitrario, portano a scrivere l'equazione di continuità della massa in forma differenziale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4.2)$$

L'equazione del moto

Per descrivere, nel modo più generale, il moto di un fluido, è necessario introdurre il *tensore delle deformazioni* (in inglese *rate of increase of strain*), ed il *tensore degli sforzi* (in inglese *stress*). La relazione che intercorre tra i due è usualmente chiamata *equazione costitutiva meccanica* . In effetti, la trattazione del nostro problema risulterà enormemente semplificata dall'assumere che il nostro fluido non sia viscoso, e che il tensore degli sforzi sia *isotropo* , riducendosi nel caso di un *fluido ideale* alla forma diagonale $-\delta_{ij}P$, dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker e P l'ordinaria pressione idrostatica. Ciò nonostante, per mettere in luce più avanti (§ IV.3.1.3) certe proprietà della struttura dell'equazione del bilancio energetico, sarà opportuno scrivere l'equazione del moto nella sua forma più generale, per ridurci poi a quella che utilizzeremo nel calcolo di un modello di atmosfera stellare.

Seguiremo la trattazione di Chandrasekhar, come nel suo libro "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability"¹.

Scriveremo l'equazione costitutiva meccanica nella forma

$$T_{ij} = -P \delta_{ij} + 2 \mu e_{ij} + 3 \lambda \delta_{ij} e_{kk}, \quad (4.3)$$

dove P è la pressione idrostatica, μ e λ i coefficienti della viscosità cinetica e della viscosità di dilatazione, ed

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

il tensore delle deformazioni. Il tensore degli sforzi $\mathcal{T} \equiv \{T_{ij}\}$ rappresenta quella parte del flusso della quantità di moto che non è dovuta al trasporto diretto per opera del moto della massa del fluido. Il termine $2\mu e_{ij} + 3\lambda \delta_{ij} e_{kk}$,

¹S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, 1981, (New York: Dover), Cap. 2, § 7. Per chi volesse approfondire la definizione delle quantità in gioco ed il loro intimo contenuto fisico, si raccomanda il libro di R. Aris, "Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics", 1989, (New York: Dover).

contributo della viscosità del tensore degli sforzi, tiene in conto gli attriti interni del fluido ². (Si noti che qui, come nel seguito, si assume la convenzione usuale di sommatoria sugli indici ripetuti.)

La condizione di *conservazione della quantità di moto* impone che la variazione per udt della quantità di moto contenuta in un arbitrario volume V di fluido sia eguale all'integrale di volume delle forze esterne che agiscono sull'elemento di fluido, più l'integrale di superficie degli sforzi normali sulla superficie S che delimita V , meno il flusso della quantità di moto che esce dal volume V come risultato dei moti attraverso la superficie S . Ciascuna delle tre componenti dell'equazione vettoriale ha la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = \int_V \rho F_i dV + \oint_S T_{ij} dS_j - \oint_S \rho v_i v_j dS_j, \quad (4.4)$$

dove F_i indica la componente i -esima della forza esterna per unità di massa.

Attraverso la trasformazione degli integrali di superficie in integrali di volume, e tenendo in conto l'equazione della continuità (eq. [4.2]), dato che il volume V è arbitrario, si giunge facilmente alla forma differenziale dell'*equazione del moto* (nuovamente scritta per le sue componenti):

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho F_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (4.5)$$

L'equazione (4.5) si può riscrivere nella forma vettoriale

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathcal{T}, \quad (4.6)$$

o, alternativamente, come

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathcal{T}, \quad (6bis)$$

dove abbiamo utilizzato la notazione diadica $\mathbf{v} \mathbf{v}$, e la divergenza del tensore degli sforzi, $\nabla \cdot \mathcal{T}$, è definita come il vettore di componenti

$$(\nabla \cdot \mathcal{T})_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (4.7)$$

Nel caso di un'atmosfera stellare, la forza esterna agente è la forza di gravità, per cui scriveremo $\mathbf{F} = \mathbf{g}$. Se inoltre assumiamo, come già

²Per maggiori dettagli si possono consultare Aris, *op. cit.*, Cap. 5, e L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, 1987, (Oxford: Pergamon Press), Cap. 2, §15.

anticipato, che il materiale stellare si comporti come un fluido ideale, l'eq. (4.6) diventa:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \nabla P . \quad (4.8)$$

Se nell'atmosfera non si verificano moti macroscopici, (*i.e.*, $\mathbf{v} = 0$), l'eq. (4.8) si riduce all'equazione dell'*equilibrio idrostatico*.

L'equazione del bilancio energetico

A meno di una costante additiva, l'energia per udV del materiale stellare è data da

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho c_V T = \frac{1}{2} \rho v^2 + \mathcal{U}(T) , \quad (4.9)$$

dove c_V è il calore specifico a volume costante. Con $\mathcal{U}(T)$ indichiamo l'energia interna per udV , funzione di stato del sistema che dipende solamente dalla temperatura T . Restano così individuati i due contributi all'energia totale del materiale: *meccanico* (riferito ai gradi di libertà esterni) e *termico* (riferito ai gradi di libertà interni). La condizione di conservazione dell'energia si esprime attraverso il bilancio tra guadagni e perdite, che ci porta all'*equazione del bilancio energetico*.

I guadagni saranno il risultato del lavoro compiuto dalle forze esterne sul volume V , e di quello compiuto dagli sforzi sopra la superficie S che delimita il volume V . Le perdite saranno espresse dal tasso con il quale l'energia fluisce in forma di calore attraverso S :

$$- \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} dS ,$$

dove $\mathbf{q} = \mathcal{K} \nabla T$ rappresenta il flusso conduttivo attraverso la superficie S per udt , e \mathcal{K} è il coefficiente di conduttività termica; e dal tasso con il quale il materiale trasporta energia per mezzo del moto:

$$- \oint_S \mathcal{U}(T) \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} dS .$$

Il risultato si riassume nell'*equazione del bilancio energetico per il materiale*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{\rho v^2}{2} + \mathcal{U}(T) \right] = \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV + \oint_S \mathbf{v} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{k} dS) +$$

$$- \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} dS - \oint_S \left[\frac{\rho v^2}{2} + \mathcal{U}(T) \right] \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} dS . \quad (4.10)$$

Con l'usuale trasformazione degli integrali di superficie in integrali di volume, l'eq. (4.10) si può riscrivere

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \mathcal{U}(T) \right] + \nabla \cdot \left[\frac{\rho v^2}{2} + \mathcal{U}(T) \right] \mathbf{v} \right\} dV = \\ \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathcal{T} dV) - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV , \end{aligned} \quad (4.11)$$

e, per l'arbitrarietà del volume V , si deriva l'equazione del bilancio energetico in forma differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \mathcal{U}(T) \right] + \nabla \cdot \left[\frac{\rho v^2}{2} + \mathcal{U}(T) \right] \mathbf{v} = \\ \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathcal{T}) - \nabla \cdot \mathbf{q} . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Vedremo ora di separare l'equazione del bilancio energetico, che contiene una componente *meccanica* ed una *termica*, in *due* equazioni, che non saranno indipendenti perchè *accoppiate* attraverso il tensore degli sforzi.

Riscriviamo l'eq. (4.12) come

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(T) + \nabla \cdot [\mathcal{U}(T) \mathbf{v}] + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} \right) = \\ \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathcal{T}) - \nabla \cdot \mathbf{q} . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Prendiamo il prodotto scalare dell'equazione del moto (eq. [4.6]) per il vettore \mathbf{v} , ed integriamo sull'elemento di volume V . Con le consuete trasformazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV + \oint_S \mathbf{v} \cdot (\mathcal{T} \cdot \mathbf{k} dS) + \\ - \oint_S \frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} dS - \int_V \mathcal{T} : \mathcal{V} dV , \end{aligned} \quad (4.14)$$

dove $\mathcal{T} : \mathcal{V}$ è il *doppio prodotto contratto*³ del tensore degli sforzi con il *tensore gradiente delle velocità*, definito come

³Per *doppio prodotto contratto* $\mathcal{A} : \mathcal{B}$ dei due tensori \mathcal{A} e \mathcal{B} si intende la doppia sommatoria $\sum_i \sum_j A_{ij} B_{ji}$, che dà come risultato uno scalare

$$\mathcal{V}_{ij} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j} .$$

L'eq. (4.14) esprime la variazione per udt dell'energia cinetica contenuta nel volume V . Dei quattro termini nel membro di destra, il primo si riferisce al lavoro compiuto dalle forze esterne \mathbf{F} sul volume V , il secondo agli sforzi sulla superficie S che delimita V ed il terzo al flusso di energia cinetica attraverso la superficie S . Il quarto si interpreta come l'aumento di energia interna dovuto alla compressione subita dal fluido, più il tasso di energia dissipata, in modo irreversibile, dalla viscosità⁴. In forma differenziale, l'eq. (4.14) si scrive:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathcal{T}) - \mathcal{T} : \mathcal{V} . \quad (4.15)$$

Dal confronto con l'eq. (4.13), discende immediatamente

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(T) + \nabla \cdot [\mathcal{U}(T) \mathbf{v}] = \mathcal{T} : \mathcal{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} . \quad (4.16)$$

E' immediata l'interpretazione fisica dell'eq. (4.16): la variazione nell' udt dell'energia interna per udV è data dal lavoro compiuto dagli sforzi perpendicolari alla superficie che delimita il volume di fluido, meno il calore che è uscito attraverso la superficie.

Il sistema formato dalle equazioni (4.15) e (4.16) descrive in una forma particolarmente illustrativa il bilancio energetico per la materia, mettendo bene in evidenza i guadagni e le perdite dovute al lavoro meccanico ed al flusso di calore. Vogliamo far risaltare che le due equazioni sono *accoppiate* attraverso il termine $\nabla \cdot (\mathcal{T} : \mathcal{V})$, lavoro *perduto* nell'equazione per l'energia cinetica, ed *acquistato* in quella per l'energia interna. E' facile ora dimostrare che, nel caso di un fluido *ideale* ed *incompressibile*, le due eq. (4.15) e (4.16) si disaccoppiano. Se ricordiamo che per un fluido ideale vale $\mathcal{T}_{ij} = -P \delta_{ij}$, segue che in questo caso particolare

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathcal{T}) = \nabla \cdot (P\mathbf{v}) = P \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla P . \quad (4.17)$$

Se il fluido è incompressibile la divergenza della velocità è nulla, e quindi $\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathcal{T})$ si riduce a $\mathbf{v} \cdot \nabla P$. D'altra parte lo sviluppo di $\mathcal{T} : \mathcal{V}$ porta all'espressione $P \nabla \cdot \mathbf{v}$, che sarà dunque nulla per un fluido incompressibile.

⁴Si veda Chandrasekhar, *op. cit.*, p. 14.

Pertanto, il sistema delle due equazioni *accoppiate* (4.15) e (4.16) si trasforma nel sistema di equazioni *disaccoppiate*

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{v} \cdot \nabla P, \quad (4.18)$$

per l'energia cinetica, e

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(T) + \nabla \cdot [\mathcal{U}(T) \mathbf{v}] = - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (4.19)$$

per l'energia interna.

4.3.2 Le equazioni per il campo di radiazione

Come già sappiamo, ogni fotone (ν, \mathbf{n}) del campo di radiazione trasporta sia una quantità di energia $h\nu$, sia una quantità di momento pari a $(h\nu/c) \mathbf{n}$. Attraverso le interazioni tra fotoni e particelle materiali, si ha un continuo interscambio di energia e momento tra il campo di radiazione ed il materiale stellare, e questo è il meccanismo attraverso il quale si realizza l'accoppiamento delle due componenti del sistema fisico "atmosfera stellare".

Analogamente a quanto abbiamo fatto nella sezione precedente per la componente materiale, vedremo ora di formulare un'equazione *energetica* ed un'equazione *dinamica* per il trasporto del momento del campo di radiazione, che ci permetteranno una descrizione *quantitativa* dell'accoppiamento tra la radiazione e la materia. A tale fine utilizzeremo i momenti angolari del campo di radiazione, ed i corrispondenti momenti dell'equazione del trasporto radiativo.

Per mezzo dei momenti angolari di ordine zero, uno e due del campo di radiazione, abbiamo già introdotto in § 1.2.2 lo *scalare*

$$u_\nu(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{c} \oint I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu(\mathbf{r}, t), \quad (4.20)$$

che rappresenta la densità specifica del campo di radiazione (cf. eq. [1.14]); il *vettore* flusso della radiazione (cf. eq. [1.18])

$$\mathcal{F}_\nu(\mathbf{r}, t) \equiv \oint I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} d\Omega, \quad (4.21)$$

tale che $\mathcal{F}_\nu \cdot \mathbf{k} dS$ esprime il tasso netto di energia radiante che fluisce attraverso l'elemento di superficie $\mathbf{k} dS$; ed il *tensore* pressione di radiazione

$$\mathcal{P}_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \oint I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} \mathbf{n} \, d\Omega = \frac{4\pi}{c} \mathcal{K}_\nu . \quad (4.22)$$

(Si vedano le equazioni [1.21] e [1.25].)

Ricordiamo inoltre che l'equazione del trasporto radiativo, nella sua forma più generale, è data dall'eq. (3.8):

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla \right) I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) = \eta(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) - \chi(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) . \quad (4.23)$$

L'equazione dell'energia

Il momento di ordine zero dell'equazione del trasporto radiativo è dato dall'integrale su tutti gli angoli solidi dell'eq. (4.23). Se integriamo successivamente su tutte le frequenze, otteniamo l' *equazione bolometrica dell'energia* per il campo di radiazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega [\eta(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) - \chi(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)] . \quad (4.24)$$

L'interpretazione fisica dei singoli termini dell'eq. (4.24) è immediata, se ricordiamo la definizione che di essi abbiamo dato. Il membro di destra è la somma della variazione temporale locale della densità di energia con la divergenza del flusso netto di energia, esprime cioè il tasso netto di variazione dell'energia radiativa. Tale quantità deve risultare eguale alle differenze tra l'energia radiante emessa localmente, quantificata per mezzo del coefficiente di emissione $\eta(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$, e quella sottratta attraverso i processi di estinzione, descritti dal coefficiente di attenuazione $\chi(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$.

Dato il suo contenuto fisico, l'eq. (4.24) costituisce evidentemente l'analogo dell'eq. (4.12), l'equazione del bilancio energetico per la materia.

L'equazione del momento

Il calcolo del momento di ordine uno dell'eq. (4.23) porge

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \oint d\Omega I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} + \oint d\Omega (\mathbf{n} \cdot \nabla) I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} = \\ \oint d\Omega [\eta(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) - \chi(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)] \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Il secondo termine del membro di sinistra può essere sviluppato come $\oint d\Omega \nabla \cdot I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{nn} = c \nabla \cdot \mathcal{P}_\nu(\mathbf{r}, t)$. L'integrale su tutte le frequenze dell'eq. (4.25) risulterà essere allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = \\ \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint d\Omega [\eta(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) - \chi(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)] \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

che rappresenta l'equazione dinamica per il *momento totale* del campo di radiazione.

Andiamo ad esaminare il contenuto fisico del membro di sinistra dell'eq. (4.26). La quantità $c^{-1} \mathcal{F}_\nu \cdot \mathbf{k} dS$, per la definizione di flusso \mathcal{F}_ν , rappresenta evidentemente il tasso netto del trasporto di momento attraverso la superficie $\mathbf{k}dS$ nell'intervallo di tempo dt , ad opera dei fotoni di frequenza ν . Con un ragionamento analogo a quello svolto nella § 1.2.2, si ricava immediatamente che la *densità di momento* associata con il campo di radiazione alla frequenza ν è pari a $c^{-2} \mathcal{F}_\nu$. Pertanto, se consideriamo il flusso bolometrico \mathcal{F} , la quantità $c^{-2} \partial \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) / \partial t$ sarà pari alla variazione temporale locale della densità di momento totale del campo di radiazione. Per quanto riguarda il termine $\nabla \cdot \mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$, per essere la divergenza del tensore pressione di radiazione bolometrica \mathcal{P} , esprime la forza di radiazione totale per unità di volume esercitata dal campo di radiazione.

Dal canto suo, il membro di destra dell'eq. (4.26) deve rappresentare il bilancio tra il guadagno e la perdita di momento dovuta all'interazione tra il campo di radiazione e la materia. D'accordo con la definizione che abbiamo dato del coefficiente di emissione (cf. § 1.3.2), la quantità $c^{-1} \eta(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$ si interpreta immediatamente come il momento che il campo di radiazione acquista per la creazione di fotoni che si propagano lungo la direzione \mathbf{n} . L'integrale su tutte le direzioni darà quindi la quantità totale di momento acquisita dal campo di radiazione come risultato del processo di emissione

di fotoni. (Se l'emissione ad opera del materiale è isotropa ed il mezzo a riposo, l'integrale su tutte le direzioni risulterà essere nullo.)

Il secondo integrale nel membro di destra rappresenta la forza totale (per udV) esercitata dalla radiazione sulla materia. Per vederlo, consideriamo un elemento di superficie orientata $\mathbf{k}dS$, ed il fascio di radiazione $I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu)$. Dell'energia che attraversa l'elemento di superficie $\mathbf{k}dS$ lungo la direzione \mathbf{n} dentro l'angolo solido $d\Omega$, nell'intervallo di tempo dt nella banda di frequenza $d\nu$, d'accordo con la nostra definizione di coefficiente di estinzione viene assorbita la frazione

$$dE_\nu^{abs}(\mathbf{n}) = \chi(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) dl I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS d\Omega d\nu dt . \quad (4.27)$$

L'elemento di lunghezza dl , misurato lungo la direzione \mathbf{n} , sarà pari a cdt , e la sua proiezione lungo la direzione \mathbf{k} risulterà essere $d\zeta = dl \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$. Pertanto, l'eq. (4.27) si può riscrivere come

$$dE_\nu^{abs}(\mathbf{n}) = \chi(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) d\zeta dS d\Omega d\nu dt , \quad (4.28)$$

dove $d\zeta dS = dV$ rappresenta il volume occupato nel tempo dt dalla radiazione che è entrata lungo la direzione \mathbf{n} attraverso l'elemento di superficie $\mathbf{k}dS$ e l'angolo solido $d\Omega$. (Tale volume risulterà essere eguale per tutte le direzioni.)

All'energia assorbita (per udV) lungo la direzione \mathbf{n} corrisponde una variazione di momento (per udV) $d\mathbf{p}(\mathbf{n}, \nu)$ pari a $dE_\nu^{abs}(\mathbf{n}) \mathbf{n}/c$. Questo ci permette di scrivere

$$\frac{1}{dV} \frac{1}{dt} \frac{dE_\nu^{abs}(\mathbf{n})}{c} \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{n}, \nu)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{n}, \nu) , \quad (4.29)$$

dove

$$\mathbf{f}(\mathbf{n}, \nu) = \frac{1}{c} \chi(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{r}, t; \mathbf{n}, \nu) \mathbf{n} d\Omega d\nu \quad (4.30)$$

sarà la forza per udV esercitata dalla radiazione di frequenza ν sulla materia, lungo la direzione \mathbf{n} . L'integrale su tutte le direzioni e frequenze dell'eq. (4.30) è proprio il secondo integrale nel membro di destra dell'eq. (4.26).

4.4 Il problema delle atmosfere stellari

Abbiamo considerato, con un certo dettaglio, la rappresentazione dei fenomeni fisici fondamentali che determinano la struttura di un'atmosfera

stellare per mezzo delle corrispondenti equazioni. Tale rassegna analitica ci pone ora in condizione di tentare una sintesi, nella quale esprimeremo quantitativamente le considerazioni formulate in termini qualitativi nella § 4.1.

L'essenza del problema consiste nel fatto che tutte le variabili fisiche interagiscono attraverso tutta l'atmosfera, e che la variazione locale di una di esse può avere un'influenza importante sulle proprietà locali a grande distanza. Per mostrarlo ora in forma esplicita, prenderemo come esempio un modello di atmosfera stellare, dove vengono fatte le ipotesi semplificatrici che il materiale stellare si comporti come un fluido ideale per il quale è possibile scrivere un'equazione di stato, e non vi sia trasporto di energia per conduzione. In tale caso, l'insieme delle equazioni rappresentative sarà quello che presentiamo nella tabella rappresentata nella Figura 4.1.

<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: 80%;"> eq. meccaniche $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} - \nabla P$ </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: 80%;"> eq. di stato $P = \frac{k}{m_H \mu} \rho T$ </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: 80%;"> eq. energetiche $\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \mathcal{U}(T) \right] + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho v^2 + \mathcal{U}(T) \right] \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \nabla \cdot (P \mathbf{v})$ $\frac{\partial}{\partial t} u + \nabla \cdot \mathcal{F} = \int d\nu \oint d\Omega (\eta_\nu - \chi_\nu I_\nu)$ </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: 80%;"> eq. del trasporto radiativo $\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla \right) I_\nu = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu$ </div>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px auto; width: 80%;"> descrizione dello stato microscopico $ETL : f(\rho, T) ; \quad \mu, \eta_\nu, \chi_\nu$ $non - ETL : f(\rho, T; \{J_\nu\})$ </div>

Figura 4.1: Le equazioni fondamentali del problema

La lettura della tabella dovrebbe mettere direttamente in evidenza l'accoppiamento tra le distinte equazioni. Vogliamo in particolare sottolineare

i seguenti punti:

i) L'equazione di stato lega le condizioni fluidodinamiche (stato "meccanico" del sistema) con quelle termodinamiche, ed accoppia lo stato meccanico con il bilancio energetico globale (materia + radiazione).

ii) I coefficienti μ , η_ν e χ_ν , che descrivono lo stato microscopico del sistema, sono funzioni dello stato termodinamico e, nel caso di non-ETL, anche dell'intensità media del campo di radiazione. Dobbiamo inoltre tenere in conto che, per effetto Doppler, i coefficienti del trasporto dipendono dalle velocità, microscopica e macroscopica, del materiale.

iii) Come conseguenza del punto (ii), i coefficienti del trasporto radiativo η_ν e χ_ν non solo esprimono la dipendenza (*esplicita* ed *implicita*) del bilancio energetico per la radiazione dalla soluzione dell'equazione del trasporto radiativo, ma accoppiano anche le due equazioni energetiche, quella per la materia e quella per il campo di radiazione.

L'accoppiamento delle equazioni attraverso l'effetto delle variabili sui coefficienti del trasporto comporta la **non-linearità** del problema. Una soluzione potrebbe essere quella di un approccio *globale*, basato su qualche metodo di *linearizzazione completa* delle equazioni in gioco. Tale approccio in effetti è largamente in uso nel calcolo attuale dei modelli di atmosfere stellari. Soffre però del grave inconveniente che il processo di linearizzazione si traduce in una matrice (che deve essere invertita) di dimensioni sovente intrattabili dal punto di vista numerico (dimensioni dell'ordine di 10^4 , e maggiori). Questo comporta gravi rischi di instabilità, e la possibile perdita dell'accuratezza numerica richiesta dal calcolo.

Vi è inoltre una ragione di carattere "fisico" per dubitare dell'efficienza del approccio globale quale metodo operativo per la soluzione del problema delle atmosfere stellari. Alla base del metodo sta il principio, che Mihalas⁵ formula esplicitamente con le parole: nessuna variabile è più "fondamentale" delle altre, perchè tutte interagiscono tra loro. Tale principio "egualitario" è però criticabile, perchè in realtà i differenti fenomeni fisici involucrati sono caratterizzati da scale di altezza differenti, e soprattutto perchè esiste una gerarchia, in ordine di importanza degli effetti individuali, tra le differenti interazioni.

Su tale base, noi proponiamo in alternativa un **approccio iterativo sequenziale**. A seconda della natura delle interazioni che tra essi esistono, i distinti processi vengono raggruppati in "blocchi elementari", tali che ognuno di essi contenga una quantità di informazione sulla fisica del processo

⁵D. Mihalas, *Stellar Atmospheres*, 1978, (San Francisco: W.H. Freeman and Co.), Cap. 7, pag. 230.

che non può essere ulteriormente ridotta. Ciascun blocco descrive un gruppo "minimo" di relazioni tra alcune delle variabili fondamentali. L'insieme dei blocchi è poi organizzato in una struttura sequenziale, che permette un processo iterativo di soluzione.

Ogni blocco viene trattato separatamente: si assume come *dati* i valori correnti delle variabili fondamentali esterne al blocco in questione, e si risolvono le equazioni del blocco per ottenere come risultato i nuovi valori correnti delle corrispondenti variabili.

L'esperienza insegna che tale schema iterativo può convergere rapidamente ad una soluzione fisicamente corretta, sempre che sia disegnato con una forma opportuna, tale cioè da rispettare la struttura gerarchica delle interazioni tra i distinti processi fisici. La giustificazione può essere trovata nel fatto che, in tale caso, l'algoritmo è la rappresentazione analogica della fisica del problema. Lo vedremo dall'analisi di due casi paradigmatici che discuteremo nei prossimi capitoli.

Capitolo 5

L'approccio iterativo sequenziale

5.1 Analisi del metodo sequenziale

Abbiamo elencato nella § 4.3 le equazioni fondamentali per la descrizione di un'atmosfera stellare, seguendo un certo ordine che potremmo definire "naturale", e che riflette il progressivo grado di complessità dei fenomeni considerati. Ora, nel momento di raccogliere e mettere in pratica le conclusioni della § 4.4, di tentare cioè una soluzione numerica *iterativa sequenziale* del problema, potremmo essere tentati di scegliere tale sequenza "naturale" come il filo conduttore del processo.

Ricordiamo che avevamo cominciato scrivendo per la materia le equazioni della continuità e del moto. Se ammettiamo noto un valore di prova per la variabile ρ (od in alternativa \mathbf{v}), l'equazione della continuità (eq. [IV.2]) ci fornirà il corrispondente valore di \mathbf{v} (alternativamente, di ρ). Note in questo modo ρ e \mathbf{v} , l'equazione del moto per un fluido ideale (eq. [IV.6]) ci dà immediatamente il valore di P . Grazie all'equazione di stato (cf. eq. [2.1]) potremo allora derivare il valore per la temperatura T . A questo punto, abbiamo a disposizione tutti gli elementi per calcolare i coefficienti del trasporto η_ν e χ_ν , e di conseguenza risolvere l'equazione del trasporto radiativo (IV.23). Dalla soluzione di quest'ultima possiamo ricavare i valori *correnti* per l'intensità specifica I_ν del campo di radiazione, e del suo valor medio J_ν .

Vale a dire che ci troviamo in condizione di verificare se l'insieme dei valori correnti: stima iniziale di ρ (o di \mathbf{v}) ed i valori ricavati per \mathbf{v} (oppure

ρ), P , T , e J_ν , soddisfa l'insieme delle equazioni energetiche, per la materia (equazioni [4.18] e [4.19]) e per il campo di radiazione (eq. [4.24]).

In generale non sarà così. Potremo però utilizzare le equazioni energetiche per calcolare un nuovo valore per la variabile iniziale, e ripetere il ciclo per ottenere un nuovo insieme di valori correnti per le altre variabili. Si può sperare che attraverso una serie di successive correzioni i valori delle variabili convergano ad un risultato che soddisfi simultaneamente tutte le equazioni del sistema.

Però, prima ancora di metterci a studiare se e sotto quali condizioni il suddetto processo iterativo può funzionare, sorge spontanea la domanda se la sequenza "naturale" che abbiamo considerato è in effetti una sequenza "logica" dal punto di vista della fisica del problema.

Una prima classificazione delle proprietà fisiche del sistema può venire dalla loro separazione in proprietà *meccaniche* (relativa ai moti macroscopici) e *termiche* (quelle che si riferiscono ai moti microscopici ed alla struttura interna delle particelle).

Dal punto di vista meccanico, sono le equazioni per la conservazione della massa e della quantità di moto quelle che configurano la *struttura meccanica* del sistema; stabiliscono cioè le relazioni tra le variabili \mathbf{v} , ρ e P . Queste ultime, anche se legate intrinsecamente alle restanti variabili, giocano però un ruolo principale nella definizione della struttura meccanica, ed a buon diritto possiamo considerarle come le "variabili protagoniste" del *blocco meccanico*.

Dal punto di vista *energetico*, saranno le equazioni per il trasporto e la conservazione dell'energia quelle che determinano l'energia interna $U(T)$ e, di conseguenza, ne definiscono la *struttura termica*. Individueremo quindi come "protagonista" del *blocco energetico* la temperatura T .

L'accoppiamento tra i due blocchi è dato dalle equazioni che descrivono lo stato del materiale, che in condizioni di ET (o almeno di ETL), si semplificano nell'equazione di stato e le leggi di Saha e Boltzmann.

La struttura ed il comportamento globale del sistema dipendono evidentemente dall'insieme di tutti i fenomeni. Con l'aiuto del quadro sinottico presentato nella Figura 4.1, possiamo vedere chiaramente come il comportamento termico, attraverso l'equazione di stato, condizioni quello meccanico; e come, reciprocamente, la densità materiale ρ influisca sulla struttura energetica attraverso l'equazione energetica per la materia. Di fatto, la densità entra esplicitamente anche nel calcolo dei coefficienti dell'equazione del trasporto radiativo e dell'equazione dell'energia per il campo di radiazione. Però l'influenza "attiva" della densità sulla struttura energetica del sistema si esercita solo nell'equazione energetica per la materia.

Questa analisi della natura fisica degli accoppiamenti tra le varie equazioni ci permette ora di ritornare alla domanda iniziale: è sensato ricavare dalle equazioni della conservazione dell'energia una delle variabili del blocco meccanico? La risposta sarà evidente. Se vogliamo mantenere l'ordine nel quale abbiamo scritto le equazioni, con quelle del trasporto radiativo e della conservazione dell'energia al finale, sarà sensato scegliere T come la variabile da correggere, in quanto la protagonista del blocco energetico.

Pertanto sarà molto più logico scegliere T come la variabile da correggere ad ogni passo del processo iterativo. La correzione sarà effettuata per mezzo delle equazioni dove T è la variabile "protagonista", vale a dire quelle del blocco energetico.

In questo modo la primitiva sequenza "naturale" resta confermata su basi fisiche, con la temperatura T quale variabile da inizializzare e successivamente correggere per mezzo del processo iterativo. Di tale maniera, la temperatura assume il ruolo di *variabile protagonista* dell'intero processo. Una volta stabilito questo, possiamo affrontare in concreto lo studio della convergenza del processo iterativo sequenziale.

Riprendiamo in considerazione le due equazioni della continuità e del moto, che chiameremo *equazioni costitutive*. Se trascuriamo per il momento le forze esterne e la forza della radiazione, abbiamo essenzialmente una relazione tra \mathbf{v} e ρ , data dall'equazione della conservazione della massa, ed una che lega tra loro \mathbf{v} , ρ e P , data da quella della conservazione del momento. Queste due relazioni ci permettono di eliminare \mathbf{v} , e ci lasciano una per le sole ρ e P . Con quest'ultima si lega l'equazione di stato

$$P = \frac{k}{m_H} \frac{\rho T}{\mu} . \quad (5.1)$$

L'informazione sullo stato microscopico del sistema è qui contenuta nella funzione $\mu = \mu(\rho, T)$, che esprime il peso molecolare medio (cf. eq. [II.1]). Risulta però che, nelle condizioni fisiche tipiche di un'atmosfera stellare, μ dipende molto poco dai valori di ρ e T , ed assume un valore compreso tra $1/2$ e $3/2$, che in prima approssimazione possiamo quindi considerare come costante.

Ora, nello spirito del nostro approccio sequenziale, la temperatura T , protagonista del blocco energetico, va vista come un'entrata, "esterna" alla fisica del blocco meccanico. Concretamente, il suo valore corrente si considera come un ulteriore *dato* per la soluzione del sistema formato dalle equazioni costitutive.

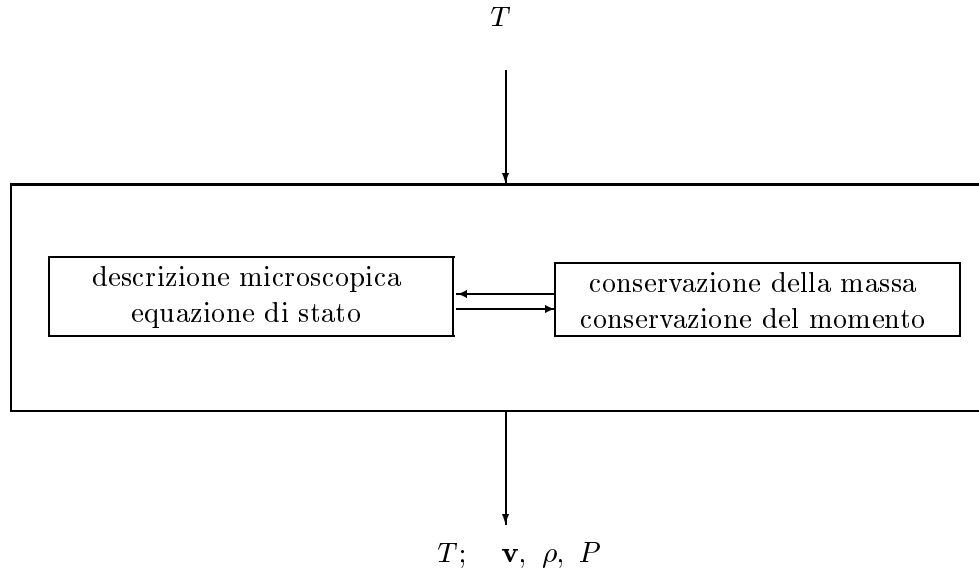


Figura 5.1: Blocco delle equazioni costitutive.

Il blocco delle equazioni costitutive contiene tutta l'informazione circa la struttura meccanica, nei termini delle equazioni che ne descrivono i processi fisici, delle relative condizioni al contorno e dei dati "esterni", tra i quali, dentro il processo sequenziale, si considera qui anche il valore corrente della temperatura T . (Si veda la Figura 5.1.)

Data la natura non lineare del sistema delle equazioni costitutive, la sua soluzione richiederà una serie di iterazioni interne al blocco. Il risultato sarà l'insieme dei valori correnti per \mathbf{v} , ρ e P che soddisfano le equazioni costitutive, consistentemente con il valore iniziale assunto per T . Saranno questi i valori in entrata per il passo successivo, cioè la soluzione dell'equazione del trasporto radiativo e delle equazioni energetiche. Lo schema sequenziale globale assumerà la forma che presentiamo nella Figura 5.2.

Il blocco delle equazioni costitutive e quello delle equazioni energetiche sono accoppiati attraverso i coefficienti dell'equazione del trasporto

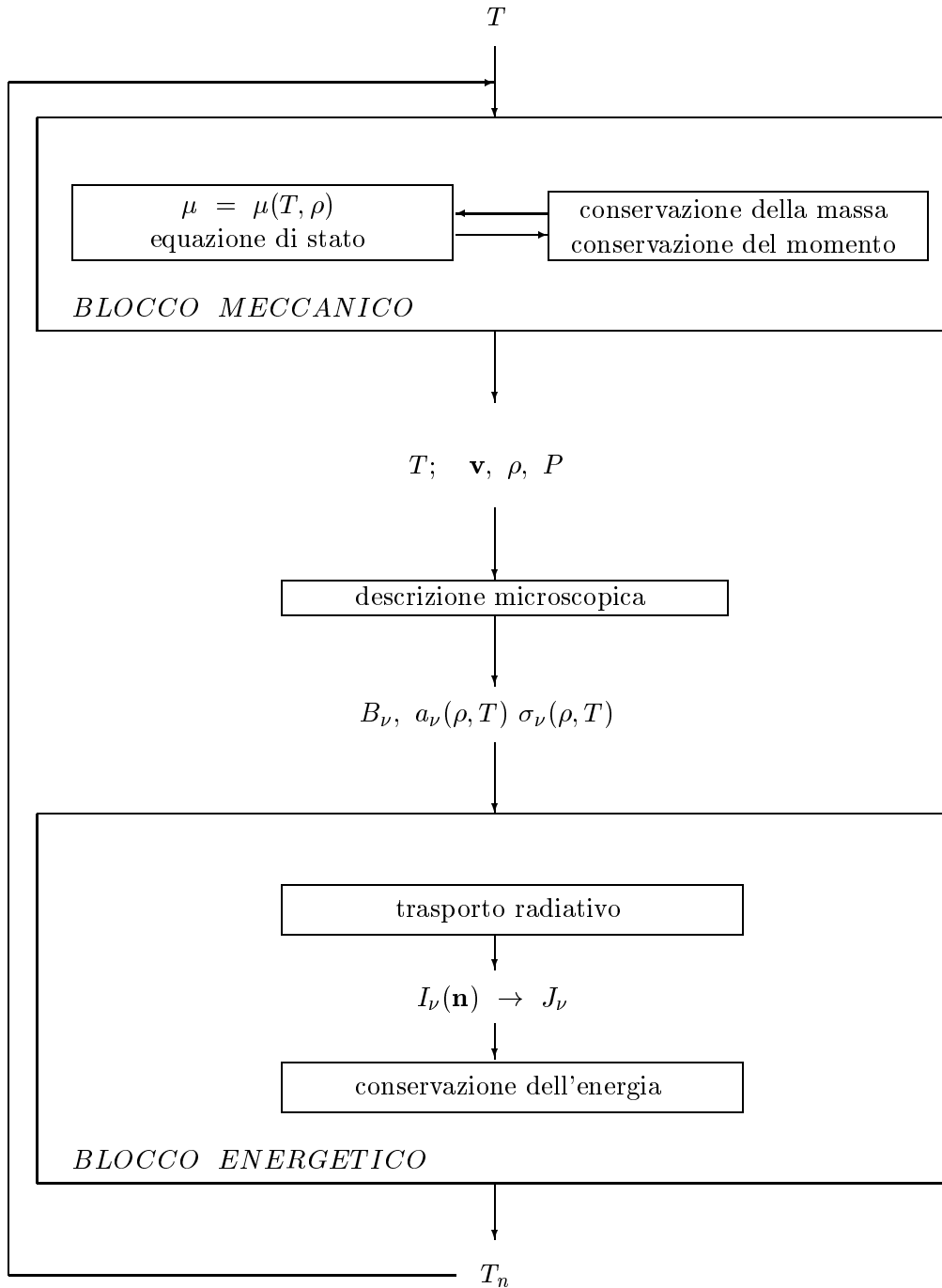


Figura 5.2: Schema a blocchi del processo iterativo sequenziale.

radiativo. Questo presume la descrizione *microfisica* del materiale stellare, che in condizioni di ETL sarà data dalle leggi di Saha e Boltzmann; la condizione di non-ETL richiederà in alternativa la soluzione del sistema delle equazioni dell'equilibrio statistico.

Però, quando viene utilizzato per il calcolo di un modello di atmosfera stellare, il processo iterativo basato su tale sequenza *non funziona*: le successive correzioni della temperatura tendono a zero, però il processo risulta convergere ad una soluzione che non è quella corretta dal punto di vista fisico, o convergere con una lentezza infinita. Di fronte all'insuccesso, ci si pone la domanda se l'approccio non può funzionare perchè è il metodo che non è *corretto globalmente*, o se il fallimento è dovuto a *problemi puntuali*, localizzati in qualche punto specifico della sequenza. La risposta potrà esser data se individuamo la causa dell'insuccesso. A tale fine, nella prossima Sezione andremo a studiare in dettaglio l'applicazione del metodo iterativo sequenziale al calcolo di un modello di atmosfera stellare che, pur basato su di una serie di ipotesi fisiche drasticamente semplificative, rimane tuttavia un paradigma valido perchè conserva la fisica essenziale del problema.

Per come lo abbiamo impostato, il problema del calcolo del modello (*i.e.*, la determinazione della struttura dell'atmosfera), si riconduce a quello della determinazione *autoconsistente* della distribuzione della temperatura.

5.2 Determinazione autoconsistente della temperatura

5.2.1 Ipotesi sul modello di atmosfera stellare

Prenderemo in considerazione un'atmosfera stellare *stazionaria*; inoltre trascureremo l'effetto delle forze espansive dovute alla pressione di radiazione. Se la velocità di rotazione non è elevata, gli strati atmosferici, che risentono del campo gravitazionale generato dalla massa globale della stella, assumono la forma di gusci sferici concentrici. Quando, nel capitolo I, abbiamo definito il sistema fisico "atmosfera stellare", non abbiamo menzionato il problema della definizione del raggio e del bordo di una stella. Non possiamo in questa sede intrattenerci ad indicare come tali definizioni possano essere date, consistentemente con la fisica del problema. Ci limiteremo soltanto a riportare la conclusione fondamentale che il raggio di una stella rimane ben definito e che, nella grande maggioranza dei casi, il "bordo", che per definizione coincide con il bordo dell'atmosfera, si può considerare come netto, e non diffuso.

Sulla base di tali definizioni (che purtroppo sono qui rimaste alquanto vaghe), è facile arrivare alla conclusione che lo spessore geometrico di una atmosfera stellare sarà, nella maggioranza dei casi, trascurabile rispetto al raggio della stella. Ciò nonostante, tale spessore risulta essere molto maggiore del cammino libero medio dei fotoni che fluiscono attraverso l'atmosfera e pertanto, dal punto di vista del trasporto dei fotoni, la geometria dell'atmosfera potrà tranquillamente essere semplificata da un sistema di strati *piano-paralleli*. Aggiungeremo l'ipotesi che tali strati siano *omogenei* dal punto di vista delle loro proprietà fisiche, per cui l'unica variabile geometrica da tenere in conto sarà la distanza radiale r , misurata a partire da un valore di riferimento opportunamente scelto.

Se ora formuliamo l'ulteriore ipotesi che non si verificano moti macroscopici del materiale, la conservazione del momento dentro ogni elemento di volume dell'atmosfera sarà espresso dalla condizione di equilibrio tra le forze interne di pressione e la forza esterna applicata (*i.e.*, la forza di gravità), riducendosi nel nostro caso alla condizione di *equilibrio idrostatico*:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -g \rho(r) \quad (5.2)$$

Le due variabili $P(r)$ e $\rho(r)$ sono legate tra loro dall'equazione di stato. I valori tipici della densità ($10^{10} - 10^{14}$ particelle per cm^3) e della temperatura ($3000 - 50000$ K) nelle atmosfere stellari, giustificano l'adozione dell'equazione di stato dei gas perfetti (cf. eq. [5.1]):

$$P(r) = \frac{k}{m_H \mu(r)} \rho(r) T(r)$$

Abbiamo già commentato più sopra che, in prima approssimazione, è lecito considerare $\mu(r)$ come costante attraverso tutta l'atmosfera. Per quanto riguarda la temperatura, è evidente che questa varierà da punto a punto: il numero di fotoni che sfuggono attraverso il bordo dell'atmosfera cresce progressivamente negli strati via via più esterni, e pertanto diminuisce la densità di energia del campo di radiazione, con il conseguente decremento della temperatura. Però, come risulta a posteriori dai calcoli, tale variazione non è grande in termini relativi: tra gli strati più superficiali e quelli al fondo dell'atmosfera la temperatura varia solamente di un fattore dell'ordine di 3. Al contrario, i gradienti di $P(r)$ e di $\rho(r)$ sono molto più grandi, e superano quello di $T(r)$ per un fattore dell'ordine di 100. Tali considerazioni ci permettono di stimare le scale di altezza per la pressione e la densità, che risultano essere dell'ordine di

$$H_{P/\rho} \simeq \frac{k T_{eff}}{g m_H \mu}, \quad (5.3)$$

dove T_{eff} indica la temperatura effettiva della stella. Stime numeriche indicano che il valore dei rapporti tra la scala di altezza $H_{P/\rho}$ ed il raggio della stella varia grosso modo tra 10^{-4} (stelle di sequenza principale) e 10^{-3} (giganti e supergiganti fredde).

Per quanto riguarda lo stato fisico microscopico del materiale stellare, stato che determina le popolazioni $(N_q^i)_j$, a partire dalle quali si calcolano la massa molecolare media μ ed i coefficienti del trasporto χ_ν ed η_ν , faremo l'ipotesi che lo stato interno soddisfa localmente i postulati dell'equilibrio termodinamico: per un dato valore della temperatura $T(r)$ e della pressione $P(r)$, le popolazioni $(N_q^i)_j$ assumono punto per punto i valori che a loro assegnano le leggi di Saha e Boltzmann. Per definizione, tale ipotesi costituisce la condizione di *equilibrio termodinamico locale* (ETL).

A questo punto, resta solo da dire esplicitamente che l'ipotesi di assenza di moti macroscopici dentro il materiale stellare riduce il vicolo della conservazione dell'energia al bilancio tra la quantità di energia che il materiale sottrae al campo di radiazione e quella che il primo restituisce al secondo: condizione dell'*equilibrio radiativo*.

5.2.2 Il sistema di equazioni rappresentative dell'atmosfera

Resta così definito un sistema fisico *stazionario, omogeneo* su strati *piano-paralleli*, ed in equilibrio *idrostatico, termodinamico locale e radiativo*. Le corrispondenti equazioni si riassumono nel sistema:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -g \rho(r) \quad (5.4)$$

$$P(r) = \frac{k}{m_H \mu} \rho(r) T(r) \quad (5.5)$$

$$\mu \frac{I_\nu(r; \mu)}{dr} = -\chi_\nu(r) \{I_\nu(r; \mu) - S_\nu [T(r)]\} \quad (5.6)$$

$$\int_0^\infty a_\nu(r) J_\nu(r) d\nu = \int_0^\infty a_\nu(r) B_\nu [T(r)] d\nu, \quad (5.7)$$

con le equazioni ausiliarie

$$S_\nu(r) = \varepsilon_\nu(r) B_\nu [T(r)] + [1 + \varepsilon(r)] J_\nu(r) \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_\nu(r) \equiv \frac{a_\nu(r)}{a_\nu(r) + \sigma_\nu(r)}. \quad (5.9)$$

La specificazione completa del problema richiede naturalmente la informazione contenuta nelle necessarie condizioni al contorno.

In questo modo siamo arrivati nuovamente alla descrizione formale della struttura dell'atmosfera stellare attraverso un sistema di equazioni, rappresentative dei fenomeni fisici considerati e dei loro accoppiamenti.

L'insieme delle equazioni (5.4) - (5.7), integrato dalle equazioni (2.6) e (2.7), cioè le leggi di Boltzmann e Saha, necessarie per il calcolo dei coefficienti del trasporto, fornisce il contenuto *quantitativo* dello schema a blocchi presentato nella Figura 5.2.

Come già sottolineato nella § 4.4, la natura non-lineare e non-locale del problema fisico si riflette nel carattere non-lineare del sistema di equazioni, non-linearità introdotta dall'influenza della soluzione sui valori dei coefficienti delle equazioni.

5.2.3 La correzione della temperatura

Come preannunciato, lo scopo del presente esercizio è quello di mettere in evidenza un eventuale punto critico dentro il processo iterativo sequenziale.

A tale fine, guidati dall'esperienza, che già ci ha fatto vedere che la soluzione iterativa del blocco delle equazioni costitutive funziona nella pratica, andiamo a considerare il *blocco energetico* come un sistema a sé stante. Vale a dire, prenderemo come *dati* del problema i valori di entrata per il blocco energetico la temperatura iniziale T_0 ed i coefficienti del trasporto calcolati a partire dalla soluzione delle equazioni del blocco costitutivo. Attraverso successive iterazioni, interne al blocco energetico, andremo a correggere la temperatura, fino ad ottenere - sempre che la procedura funzioni - la convergenza ad una nuova soluzione, fisicamente corretta.

Lo schema iterativo sarà allora il seguente:

Risolveremo in un primo passo il sistema delle equazioni del trasporto radiativo. Per semplificare la trattazione (ed ancora una volta senza che questo ci faccia perdere nulla dell'essenza della fisica del problema) introdurremo l'ulteriore ipotesi che non si verifichino processi di diffusione (*i.e.*, $\sigma_\nu = 0$). Le funzioni sorgente (cf. le equazioni [V.8] e [V.9]) si riducono allora alla forma $S_\nu = B_\nu(T)$, dove $T = T_0$ è qui assunta come nota. Questo ci permette di scrivere l'equazione del trasporto radiativo (ora nella variabile indipendente τ_ν) come

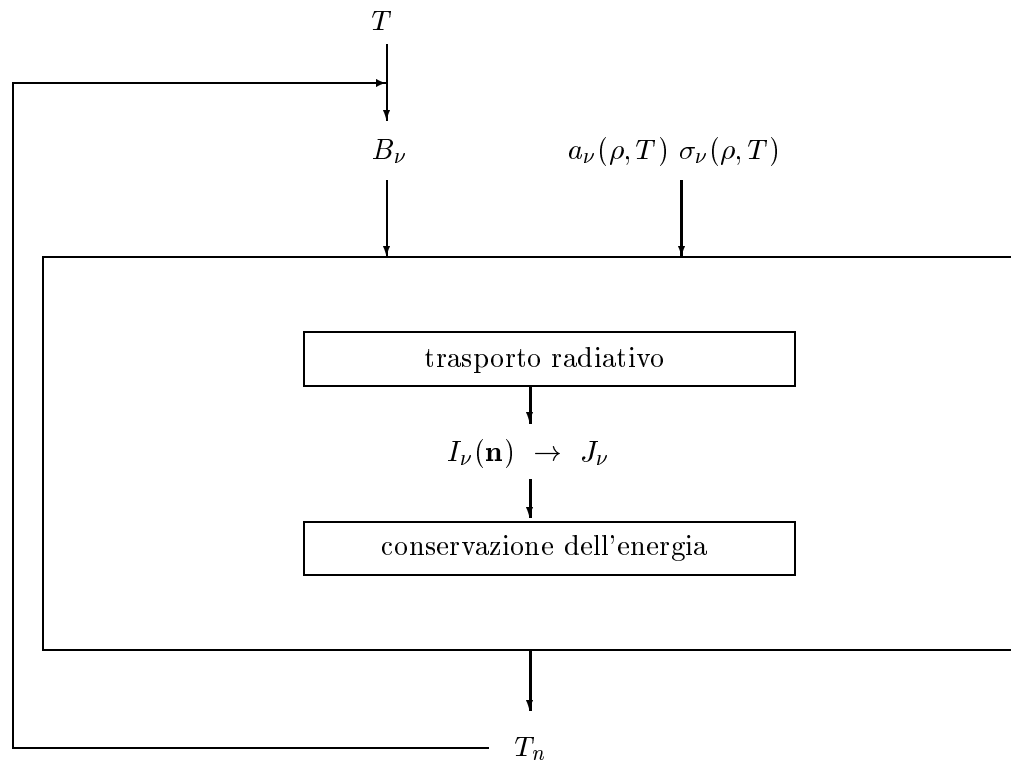


Figura 5.3: Soluzione sequenziale del blocco energetico. I coefficienti del trasporto, a_ν e σ_ν , sono assunti come dati esterni al ciclo iterativo.

$$\mu \frac{dI_\nu(\mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\mu) - B_\nu(T) \quad (5.10)$$

la cui soluzione ci permette di calcolare successivamente il valor medio J_ν del campo di radiazione.

A questo punto, utilizzeremo come "correttore" della temperatura T l'equazione della conservazione dell'energia, che abbiamo potuto esprimere nella forma dell'eq. (5.7) perchè, in condizioni di ETL, il termine di emissione η_ν è dato dalla legge di Kirchhoff: $\eta_\nu = a_\nu B_\nu$. È importante sottolineare che, in condizioni di equilibrio radiativo e termodinamico locale, la temperatura locale $T(r)$ è determinata univocamente da una *unica legge esplicita di conservazione*.

Se ora T_n rappresenta il valore della temperatura che soddisfa l'equazione dell'equilibrio radiativo (eq. [5.7]), il corrispondente valore della funzione di Planck potrà essere espresso come uno sviluppo in serie al primo ordine, a partire dalla temperatura corrente T :

$$B_\nu(T_n) = B_\nu(T) + \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T} \right)_T (T_n - T) . \quad (5.11)$$

Per sostituzione nell'eq. (5.7), si ottiene immediatamente il nuovo valore della temperatura:

$$T_n = T + \frac{J_a - \int_0^\infty a_\nu B_\nu(T) d\nu}{\int_0^\infty a_\nu \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T} \right)_T d\nu} , \quad (5.12)$$

dove si è posto

$$J_a \equiv \int_0^\infty a_\nu J_\nu d\nu . \quad (5.13)$$

Il termine J_a è il risultato ottenuto dalla soluzione del sistema delle equazioni del trasporto radiativo, le cui funzioni sorgente erano state calcolate a partire dalla temperatura "vecchia" T . Ora, mentre lasciamo inalterati i valori del coefficiente a_ν , calcolati con la temperatura iniziale T_0 , calcoliamo i nuovi valori $B_\nu(T_n)$ per le funzioni sorgente, e ripetiamo il processo. E' però un dato di fatto che tale procedura, in pratica, *non funziona*.

Quanto stiamo facendo va sotto il nome di *iterazione- Λ* , perchè formalmente fa uso, per la soluzione dell'equazione del trasporto radiativo, dell'operatore Λ ¹. L'iterazione- Λ , ben nota ai fisici come serie di von Neumann (o di Picard), è un metodo standard per la soluzione di equazioni

¹L'operatore Λ viene introdotto, nella formulazione del trasporto radiativo, a partire dall'equazione integrale di Schwartzschild. Si veda, p. es., Mihalas, *op. cit.*, p. 41.

integro-differenziali. Risulta però non convergere quando lo spessore ottico del sistema è elevato, come è il caso delle atmosfere stellari. Senza riprendere qui la discussione esaustiva delle cause che impediscono l'uso dell'iterazione- Λ in detti casi ², basta esaminare l'eq. (V.12) per rendersi conto di una difficoltà essenziale. All'interno dell'atmosfera, a profondità che variano secondo i differenti valori delle opacità monocromatiche, il sistema tende alle condizioni di equilibrio termodinamico; in particolare, l'intensità specifica del campo di radiazione assume i valori prescritti dalla funzione di Planck, e di conseguenza il valore di J_a tenderà ad eguagliare quello dell'integrale $\int a_\nu B_\nu(T) d\nu$. Pertanto, il valore della correzione $T_n - T$ risulterà essere nullo, indipendentemente dal valore iniziale T .

Lo schema iterativo che abbiamo considerato comporta la soluzione *sequenziale* delle equazioni del trasporto radiativo e della conservazione dell'energia. Però, la formula correttiva della temperatura, basata sulla linearizzazione della funzione di Planck, ci potrebbe permettere di incorporare direttamente la correzione della temperatura dentro l'espressione della funzione sorgente. Dalle equazioni (V.11) e (V.12) segue infatti

$$B_\nu(T_n) = B_\nu(T) + \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T} \right)_T \frac{J_a - \int_0^\infty a_\nu B_\nu(T) d\nu}{\int_0^\infty a_\nu \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T} \right)_T d\nu}, \quad (5.14)$$

che possiamo scrivere in forma abbreviata come

$$B_\nu(T_n) = f_1(\nu; T) + f_2(\nu; T) J_a, \quad (5.15)$$

dove $f_1(\nu; T)$ ed $f_2(\nu; T)$ sono due funzioni note della temperatura "vecchia" T .

In questo modo possiamo riscrivere l'equazione del trasporto radiativo in una forma, *che include la condizione dell'equilibrio radiativo*:

$$\mu \frac{dI_\nu(\mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\mu) - f_1(\nu; T) - f_2(\mu; T) \int_0^\infty a_\nu J_\nu d\nu. \quad (5.16)$$

La soluzione del trasporto ottenuta dal sistema di eq. (5.16) ci fornisce un insieme di valori per l'intensità specifica I_ν , che sono *coerenti* (se trascuriamo che i valori delle due funzioni f_1 ed f_2 sono calcolati a partire dalla temperatura "vecchia") con la condizione dell'equilibrio radiativo.

²Si veda Mihalas, *op. cit.*, Cap. 6, § 1.

Potremmo quindi, in principio, calcolare il termine J_a con i valori ottenuti per un campo di radiazione calcolato con una temperatura che è quella corrispondente alla condizione di equilibrio. Successivamente, sarebbe banale esplicitare il valore corretto della temperatura, risolvendo l'equazione trascendente:

$$\int_0^{\infty} a_{\nu} B_{\nu}(T) d\nu = J_a \equiv \int_0^{\infty} a_{\nu} J_{\nu} d\nu , \quad (5.17)$$

e procedere iterativamente fino alla convergenza.

Il problema è che, però, la funzione sorgente nell'eq. (5.16) include un termine che, per contenere un integrale pesato dell'intensità media J_{ν} , può essere assimilato formalmente ad un integrale di diffusione. Risulta impossibile, nella pratica, risolvere un problema "diffusivo" per mezzo di un processo iterativo, che è in sostanza un'iterazione Λ . Infatti, a cominciare dalle frequenze più opache che pesano maggiormente nell'integrale J_a , i valori di J_{ν} tendono a quelli corrispondenti di $B_{\nu}(T)$. Nel migliore dei casi, la velocità di convergenza sarà infinitamente lenta. Però, cosa ben più grave, la precisione numerica del calcolo può risultare insufficiente per esprimere la differenza tra J_{ν} e B_{ν} con un adeguato numero di cifre significative.

Risulta così evidente la difficoltà intrinseca del problema: la condizione di conservazione dell'energia implica l'accoppiamento, nelle funzioni sorgente specifiche di ogni singola equazione monocromatica del trasporto, di *tutte* le intensità specifiche, cioè di *tutte* le soluzioni individuali, che hanno scale d'altezza molto diverse tra loro a causa delle enormi differenze delle distinte opacità monocromatiche.

Grazie a questa analisi, siamo riusciti ad individuare *il punto critico* dell'intero processo iterativo sequenziale: *non è possibile trattare in due passi successivi la soluzione delle equazioni del trasporto e la correzione della temperatura per mezzo dell'equazione dell'equilibrio radiativo*. L'interazione tra i due fenomeni, trasporto della radiazione e conservazione dell'energia, costituisce un accoppiamento **forte**, in contrasto ai casi precedenti, che legittimamente potremo considerare come accoppiamenti **deboli**. Bisognerà allora cercare una efficiente soluzione *simultanea* dei due processi, che non potrà essere, come abbiamo visto, una iterazione- Λ .

Nel prossimo capitolo mostreremo come si possa superare la difficoltà, grazie al metodo dei *Fattori di Iterazione*.

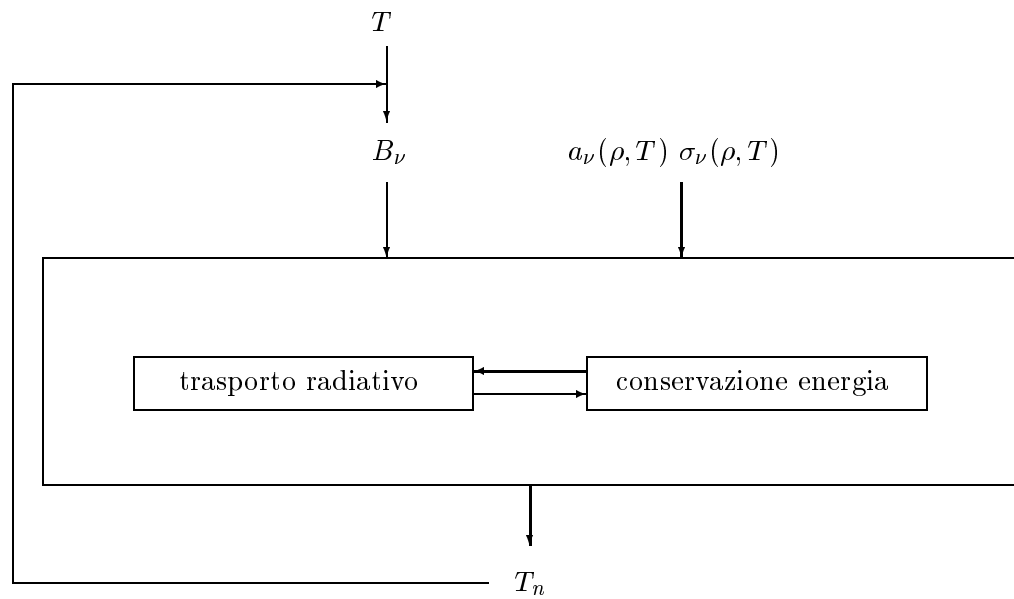


Figura 5.4: Blocco energetico: soluzione simultanea delle equazioni del trasporto radiativo e della conservazione dell'energia.

Capitolo 6

Il metodo dei Fattori di Iterazione

In questo capitolo si giunge al termine del discorso iniziato nel Capitolo 4. Daremo innanzi tutto (nella § 6.1) la soluzione del problema della determinazione della temperatura nel caso di un'atmosfera stellare in equilibrio radiativo, preannunciata alla fine del capitolo 5. Vedremo nella § 6.2 come tale soluzione si ottiene grazie all'introduzione di opportune quantità ausiliari, che definiremo *Fattori di Iterazione*.

Successivamente ritorneremo nella § 6.3 al problema dell'atomo con due livelli. La soluzione, ottenuta ora per mezzo dei fattori di iterazione, non solo offre un ulteriore esempio dell'applicazione del metodo. Ci permette anche di introdurre l'idea della *rappresentazione implicita* del campo di radiazione che, come vedremo, supera la difficoltà intrinseca all'iterazione λ .

Come conclusione, nella § 6.4 porteremo il caso dell'atomo con più di due livelli energetici come paradigma della soluzione di un problema fortemente non-lineare per mezzo di una procedura sequenziale iterativa, nella quale si riesce ad isolare distinti "blocchi fisici" ed a trasmettere dall'uno all'altro tutta e sola l'informazione necessaria per descrivere le interazioni che li legano tra loro.

6.1 Soluzione del trasporto consistente con l'equilibrio radiativo

L'analisi del metodo iterativo sequenziale del capitolo precedente ci ha portato alla conclusione che l'interazione tra due fenomeni fisici sarà più o meno "forte", dipendendo dalle loro caratteristiche intrinseche. Abbiamo

introdotto le parole *debole* e *forte* per classificare *qualitativamente* due distinti tipi di accoppiamento, secondo un criterio *operativo*, che in taluni casi (come l'esempio della correzione della temperatura discusso nella § 5.2.3) può essere giustificato da considerazioni di carattere fisico. Il criterio si basa sulla possibilità o meno di risolvere sequenzialmente le equazioni relative ai blocchi in questione.

Alla fine del capitolo precedente ci siamo prefissati come compito quello di ottenere una soluzione simultanea dell'equazione del trasporto radiativo e della conservazione dell'energia, che non sia del tipo di una iterazione Λ . Dimostreremo ora come ciò sia possibile, impiegando il sistema dei momenti delle equazioni del trasporto radiativo, *integrate da una opportuna condizione di chiusura*. Faremo vedere come, per questa strada, è possibile arrivare alla realizzazione di un processo sequenziale, dove l'accoppiamento tra il blocco *trasporto radiativo* e quello *conservazione dell'energia* può essere declassato da forte a debole. Vale a dire, per la definizione che abbiamo dato dei due aggettivi, che è possibile trovare un algoritmo iterativo sequenziale che funzioni.

Riprendiamo l'equazione del trasporto radiativo (eq. [5.5]), assieme alle equazioni ausiliarie (5.8) e (5.9):

$$\mu \frac{dI_\nu(r; \mu)}{dr} = - \chi_\nu(r) [I_\nu(r; \mu) + S_\nu(r)] ,$$

$$S_\nu(r) = \varepsilon_\nu(r) B_\nu [T(r)] + [1 - \varepsilon_\nu(r)] J_\nu(r) ,$$

$$\varepsilon_\nu(r) \equiv \frac{a_\nu(r)}{a_\nu(r) + \sigma_\nu(r)} .$$

I momenti di ordine zero ed uno dell'eq. (5.6) sono rispettivamente

$$\frac{H_\nu(r)}{dr} = - \chi_\nu(r) [J_\nu(r) - S_\nu(r)] \quad (6.1)$$

e

$$\frac{K_\nu(r)}{dr} = - \chi_\nu(r) H_\nu(r) , \quad (6.2)$$

dove appaiono i momenti di ordine zero, uno e due dell'intensità specifica del campo di radiazione:

$$J_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(r; \mu) d\mu , \quad (6.3)$$

$$H_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(r; \mu) \mu \, d\mu , \quad (6.4)$$

e

$$K_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(r; \mu) \mu^2 \, d\mu . \quad (6.5)$$

Introduciamo ora l'opacità media di Rosseland $\chi_R(r)$, definita da

$$\frac{1}{\chi_R(r)} \equiv \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu(r)} \frac{\partial}{\partial T} B_\nu [T(r)] \, d\nu / \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial T} B_\nu [T(r)] \, d\nu , \quad (6.6)$$

e definiamo l'opacità media pesata col flusso

$$\begin{aligned} \chi_H(r) &\equiv \int_0^\infty \chi_\nu(r) H_\nu(r) \, d\nu / \int_0^\infty H_\nu(r) \, d\nu = \\ &\int_0^\infty \chi_\nu(r) H_\nu(r) \, d\nu / H(r) . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Il cambio della variabile indipendente, dalla direzione radiale r alla profondità ottica di Rosseland $\tau \equiv \tau_R \equiv -\chi_R dz$ permette di riscrivere le equazioni (6.1) e (6.2) nella forma

$$\frac{dH_\nu(\tau)}{d\tau} = \frac{a_\nu(\tau)}{\chi_R(\tau)} [J_\nu(\tau) - B_\nu(\tau)] ; \quad (6.8)$$

$$\frac{dK_\nu(\tau)}{d\tau} = \frac{\chi_\nu(\tau)}{\chi_R(\tau)} H_\nu(\tau) . \quad (6.9)$$

L'integrazione su tutte le frequenze delle equazioni (6.8) e (6.9) porta alle equazioni bolometriche:

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\chi_R(\tau)} \left[\int_0^\infty a_\nu(\tau) J_\nu(\tau) \, d\nu - \int_0^\infty a_\nu(\tau) B_\nu(\tau) \, d\nu \right] \quad (6.10)$$

e

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau} = \frac{\chi_H(\tau)}{\chi_R(\tau)} H(\tau) . \quad (6.11)$$

La condizione dell'equilibrio radiativo impone che i due integrali nel membro di destra dell'eq. (6.10) siano eguali; di conseguenza il flusso bolometrico $H(\tau)$ risulterà costante:

$$H(\tau) = H = \frac{\sigma}{4\pi} T_{eff}^4 . \quad (6.12)$$

L'equazione differenziale per il momento bolometrico $K(\tau)$ diventa allora:

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau} = \frac{\chi_H(\tau)}{\chi_R(\tau)} H . \quad (6.13)$$

A questo punto, possiamo definire le due quantità:

$$F(\tau) \equiv \frac{K(\tau)}{J(\tau)} \quad (6.14)$$

e

$$\beta(\tau) \equiv \frac{\chi_H(\tau)}{\chi_R(\tau)} . \quad (6.15)$$

Sono entrambe *rapporti tra due quantità omogenee*: la prima tra due momenti dispari dell'intensità specifica, la seconda tra due opacità medie. La prima, in particolare, è affine al fattore variabile di Eddington ¹, e porge una relazione di chiusura per il sistema dei momenti bolometrici.

Grazie alle due nuove funzioni, $F(\tau)$ e $\beta(\tau)$, possiamo riscrivere l'eq. (6.13) come un'equazione differenziale per l'intensità media bolometrica $J(\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau} [F(\tau)J(\tau)] = \beta(\tau) H . \quad (6.16)$$

L'eq. (6.16) è un'equazione del trasporto per l'intensità specifica media bolometrica, *che include la condizione dell'equilibrio radiativo*. È quindi la soluzione simultanea delle equazioni del trasporto e della conservazione dell'energia che andiamo cercando.

Prenderemo come condizione iniziale il valore di $J(\tau)$ alla superficie dell'atmosfera, e lo scriveremo nella forma

$$J(\tau = 0) = \gamma H , \quad (6.17)$$

che definisce implicitamente la quantità γ come il rapporto

$$\gamma \equiv \frac{J(\tau = 0)}{H} . \quad (6.18)$$

¹Cf., Mihalas, *op. cit.*, Cap. I, p. 18.

Ora, se le funzioni $\beta(\tau)$ ed $F(\tau)$ fossero note, assieme al valore del parametro γ , l'eq. (6.16) potrebbe essere integrata immediatamente, dando come soluzione

$$J(\tau) = \frac{H}{F(\tau)} \left[\gamma F(\tau = 0) + \int_{\tau=0}^{\tau} \beta(t) dt \right]. \quad (6.19)$$

Tale soluzione esprime il valor medio bolometrico $J(\tau)$ di un campo di radiazione che *soddisfa automaticamente la condizione dell'equilibrio radiativo*.

A questo punto, possiamo definire due coefficienti medi di assorbimento:

$$a_P(\tau) \equiv \int_0^{\infty} a_\nu(\tau) B_\nu[T(\tau)] d\nu / \int_0^{\infty} B_\nu[T(\tau)] d\nu \quad (6.20)$$

e

$$a_J(\tau) \equiv \int_0^{\infty} a_\nu(\tau) J_\nu(\tau) d\nu / \int_0^{\infty} J_\nu(\tau) d\nu. \quad (6.21)$$

L'introduzione delle quantità a_P ed a_J permette di riscrivere la condizione dell'equilibrio radiativo (che abbiamo già utilizzato per derivare l'eq. [6.16]) nella forma

$$a_J(\tau) J(\tau) = a_P B [T(\tau)]. \quad (6.22)$$

Se introduciamo ora la nuova funzione

$$\alpha(\tau) \equiv \frac{a_J(\tau)}{a_P(\tau)}, \quad (6.23)$$

anch'essa una quantità omogenea, perchè rapporto di due coefficienti di assorbimento medi, l'eq. (6.22) si può riscrivere come

$$B(T) = \alpha(\tau) J(\tau). \quad (6.24)$$

Ora, per la legge di Stefan-Boltzmann, $B(T)$ è proporzionale alla quarta potenza della temperatura T , e quindi l'eq. (6.24) ci permette di ottenere una formula esplicita per la temperatura *consistente con il campo di radiazione che soddisfa simultaneamente le equazioni del trasporto e dell'equilibrio radiativo*:

$$T(\tau) = \left[\frac{\sigma}{\pi} \alpha(\tau) J(\tau) \right]^{1/4}. \quad (6.25)$$

6.2 I Fattori di Iterazione

Nella sezione precedente siamo riusciti a scrivere formalmente una soluzione per il trasporto radiativo consistente con il vincolo della conservazione dell'energia, che nel nostro caso è espressa dall'equazione dell'equilibrio radiativo. E, nello stesso tempo, abbiamo ottenuto un'espressione esplicita per la corrispondente distribuzione della temperatura.

Però, dal punto di vista operativo, la soluzione per $J(\tau)$ si ottiene solamente se le funzioni $\beta(\tau)$ ed $F(\tau)$, così come la condizione iniziale γ , sono note, il che non si verifica all'atto pratico di risolvere il problema.

Nel caso che stiamo considerando, cioè la ricerca della soluzione per il blocco energetico dentro uno schema iterativo, noi abbiamo come *dati esterni*, e quindi assumiamo come noti dentro il blocco, i valori dei coefficienti del trasporto χ_ν ed a_ν . Pertanto la funzione $\beta(\tau)$ sarà data. Non è noto invece il valore del rapporto $K(\tau)/J(\tau)$, che dipende dalla soluzione dell'equazione del trasporto. Possiamo però introdurre la relazione *approssimata* di chiusura $F(\tau) = K(\tau)/J(\tau)$, ottenuta a partire da una precedente soluzione delle equazioni monocromatiche del trasporto radiativo. Costruiremo allora un nuovo schema iterativo (v. Figura 6.1): una prima soluzione del sistema di equazioni del trasporto monocromatiche, nelle quali le funzioni sorgenti specifiche saranno calcolate a partire dalla temperatura "vecchia", ci permetterà di calcolare i valori corrispondenti di $F(\tau)$ e γ . Questa chiusura approssimata ci permetterà di riscrivere l'equazione del trasporto consistente con la condizione di equilibrio radiativo nella forma data dall'eq. (6.16), e di ottenere una "nuova" temperatura grazie all'eq. (6.25). Ricalcoleremo allora le funzioni sorgenti specifiche, e dalla nuova soluzione del sistema delle equazioni del trasporto monocromatiche otterremo una nuova condizione di chiusura.

L'esperienza insegna che *il nuovo schema converge rapidamente alla soluzione fisicamente corretta*. Sulla base di quanto fin qui detto, diventa facile darne una spiegazione. Mentre nello schema vecchio (cf. Fig. V.3) i due blocchi, "trasporto radiativo" e "conservazione dell'energia", erano accoppiati per mezzo dei valori dell'intensità specifica media monocromatica, soluzione del sistema delle equazioni monocromatiche del trasporto, nel nuovo schema (cf. Figura 6.1) abbiamo sostituito il blocco "conservazione dell'energia" con uno che contiene la *soluzione simultanea* del trasporto e della conservazione dell'energia. I due blocchi non sono più accoppiati per mezzo dell'insieme dei valori di J_ν , ma dai rapporti $F(\tau) \equiv K(\tau)/J(\tau)$ e $\gamma \equiv J(\tau = 0)/H$. Dentro il blocco "soluzione simultanea TR & ER", l'accoppiamento del trasporto radiativo con la conservazione dell'energia si

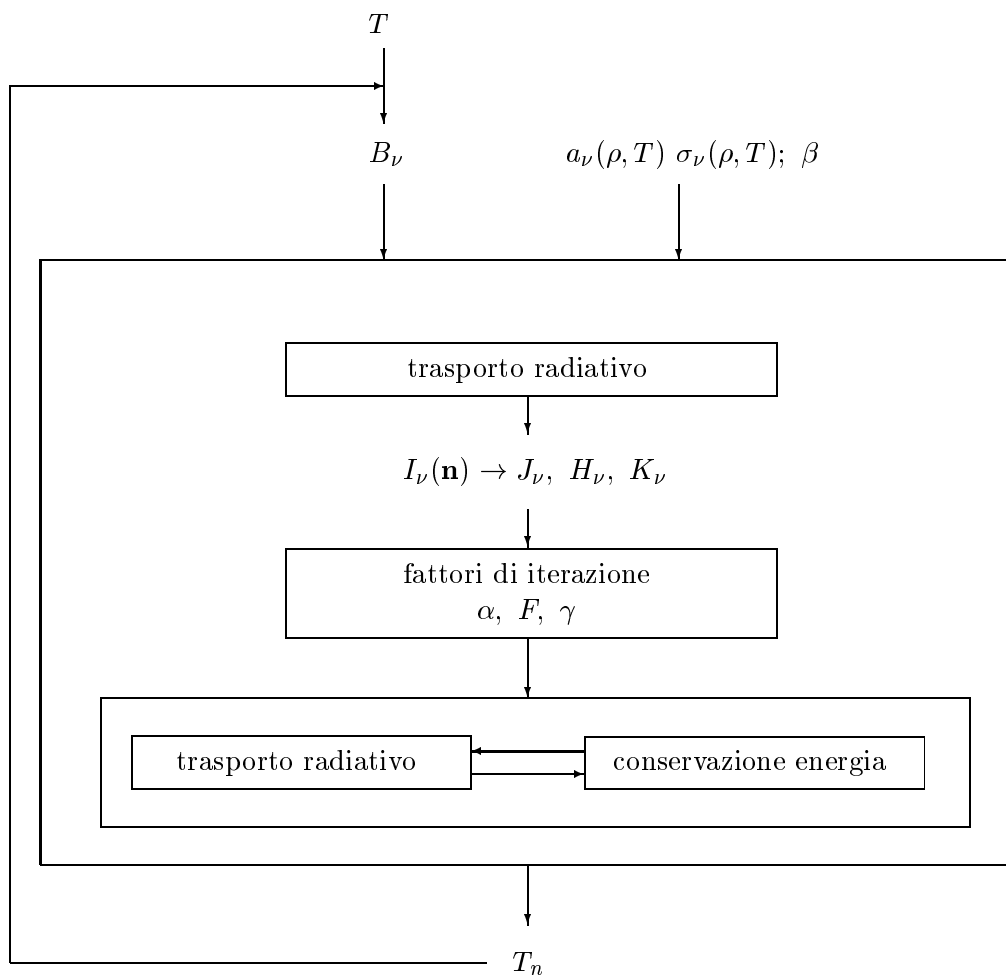


Figura 6.1: Soluzione iterativa del blocco energetico per mezzo dei fattori di iterazione.

compie ora per mezzo dell'ulteriore fattore $\alpha(\tau)$, a differenza del precedente caso, schematizzato in Figura 5.4, nel quale l'accoppiamento si realizzava attraverso l'integrale $J_a = \int a_\nu J_\nu d\nu$.

Il successo dello schema iterativo appena descritto è il risultato dell'applicazione dei principi alla base del nostro metodo sequenziale, che avevamo sottolineato alla fine del Capitolo 4: il rispetto della struttura gerarchica tra le distinte interazioni e, soprattutto, una efficiente trasmissione dell'informazione fisica tra i blocchi. L'informazione ottenuta dalla soluzione del blocco "trasporto radiativo", così come quella proveniente del blocco "costitutivo", viene trasmessa al blocco "soluzione simultanea TR & ER" per mezzo delle funzioni $\beta(\tau)$ ed $F(\tau)$, e della condizione iniziale γ .

I rapporti tra grandezze fisiche omogenee, quali sono le funzioni $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, $F(\tau)$ e γ utilizzate nel presente caso, sono da noi chiamati *Fattori di Iterazione*.²

Grazie alla loro natura intrinseca, questi rapporti riescono a trasportare in modo ottimale l'informazione da un blocco all'altro, perchè in un certo senso "filtrano" l'errore trasportato dai valori correnti della soluzione, che via via vengono corretti attraverso il processo iterativo. Anche se i valori correnti delle quantità considerate possono essere lontani dai loro valori finali corretti, il rapporto tra grandezze fisiche omogenee permette di correggere gli effetti introdotti da un erroneo fattore di scala. Per conseguenza, i fattori di iterazione risulteranno essere *quasi-invarianti* nel corso della procedura iterativa.

6.3 Il problema dell'atomo con due livelli

6.3.1 L'equazione TR per il problema dell'atomo con due livelli

Riprendiamo il problema, già considerato in § 2.5.1, della formazione di una riga spettrale in un mezzo costituito da ipotetici atomi con due soli livelli di energia. Questo problema, che potrebbe sembrare a prima vista un mero esercizio accademico, costituisce in realtà un paradigma utilissimo sia per la comprensione dei meccanismi alla base della formazione delle righe spettrali, sia per la formulazione matematica e numerica del relativo problema di trasporto radiativo. A noi fornirà l'occasione per dare un ulteriore esempio di applicazione del metodo dei Fattori di Iterazione, e per introdurre l'idea di

²La presentazione del metodo dei fattori di iterazione si trova in E. Simonneau e L. Crivellari, 1988, *Astrophys. J.*, **330**, 415,

rappresentazione implicita del campo di radiazione che, come vedremo, permette di superare la difficoltà intrinseca dell'iterazione Λ quando è applicata al problema dell'atomo con due livelli.

Per rendere più semplice la trattazione assumeremo, come già abbiamo fatto in § 3.4, che il profilo di assorbimento $\varphi(\nu)$ e quello di emissione $\psi(\nu)$ siano eguali (caso della redistribuzione completa). Assumeremo inoltre che il mezzo non sia esposto ad un campo di radiazione esterno, e che la geometria del sistema permetta l'approssimazione piano-parallela per descrivere il trasporto della radiazione. Sotto tali ipotesi, l'equazione TR prenderà la forma

$$\mu \frac{dI(z; \mu, \nu)}{dz} = -\chi_\nu I(z; \mu, \nu) + \eta_\nu, \quad (6.26)$$

dove il coefficiente di attenuazione χ_ν e quello di emissione η_ν sono dati rispettivamente dalle equazioni (2.39) e (2.40):

$$\chi_\nu = \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \varphi(\nu) \quad (6.27)$$

e

$$\eta_\nu = \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} n_u A_{ul} \varphi(\nu), \quad (6.28)$$

dove l indica il livello inferiore ed u quello superiore.

Con l'introduzione di una profondità ottica di riferimento

$$d\tau = -\frac{h\nu_{lu}}{4\pi} (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) dz, \quad (6.29)$$

l'eq. (6.26) si riscrive

$$\mu \frac{dI(\tau; \mu, \nu)}{d\tau} = \varphi(\nu) [I(\tau; \mu, \nu) - S(\tau; \nu)]. \quad (6.30)$$

La funzione sorgente $S(\tau; \nu)$ sarà quella che già avevamo ottenuto in precedenza (cf. eq. [3.32]):

$$S(\tau; \nu) \equiv S_{lu} = \frac{n_u A_{ul}}{(n_l B_{lu} - n_u B_{ul})}. \quad (6.31)$$

Come già visto, con gli opportuni passaggi algebrici e tenendo in conto le relazioni tra i coefficienti di Einstein, si ottiene

$$S_{lu} = \left[\int_0^\infty \varphi(\nu) J(\tau; \nu) d\nu + \varepsilon B_\nu \right] / (1 + \varepsilon) =$$

$$\epsilon B_\nu + (1 - \epsilon) J_\varphi(\tau), \quad (6.32)$$

dove qui si sono definiti $\epsilon \equiv \varepsilon / (1 + \varepsilon)$, con ε dato dall'eq. (3.35), cioè

$$\varepsilon \equiv \frac{C_{ul}}{A_{ul}} \left(1 - e^{h\nu_{ul}/kT}\right),$$

e

$$J_\varphi(\tau) \equiv \int_0^\infty \varphi(\nu) J(\tau; \nu) d\nu. \quad (6.33)$$

E' opportuno sottolineare che la forma della funzione sorgente, data dall'eq. (6.32), può essere derivata perchè nel caso che stiamo considerando abbiamo a disposizione una relazione di chiusura *unica*, l'equazione dell'equilibrio statistico tra i due livelli, che rappresenta la necessaria legge di conservazione. Quest'ultima esprime il meccanismo fisico (che in § 3.4.2 avevamo definito esterno) responsabile dell'accoppiamento delle intensità specifiche nella funzione sorgente.

Si vede immediatamente che S_{lu} risulta indipendente dalla direzione, mentre la dipendenza dalla frequenza è dovuta solo alla funzione di Planck B_ν (che oltretutto risulta praticamente costante nella banda di frequenze della riga spettrale). Pertanto la funzione sorgente S_{lu} è *la stessa* per ogni specifica equazione TR.

La funzione sorgente accoppia tutte le direzioni e tutte le frequenze attraverso il termine J_φ , dal quale dipende *linearmente*. (Va fatto osservare che il termine J_φ , come si vede dall'eq. (6.33), ricorda nella forma un integrale di diffusione. Per tale ragione il problema dell'atomo con due livelli può essere considerato un caso di "pseudo-scattering".)

6.3.2 Soluzioni numeriche iterative

E' possibile una soluzione diretta del problema TR per l'atomo a due livelli, formulato nei termini esposti nella sezione precedente. Il termine di accoppiamento, J_φ , lineare nelle intensità specifiche, può essere sostituito da una doppia sommatoria sulle frequenze discrete ν_J e direzioni discrete μ_I . Il problema si riconduce in questo modo alla soluzione di un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine; soluzione che può essere ottenuta per mezzo di metodi numerici standard.

Nella pratica però, dato il grande numero di punti in frequenza che devono essere considerati per un'accurata approssimazione dell'integrale (il numero di direzioni necessarie, al contrario, rimane limitato), le dimensioni del sistema risultano soventi tali che gli inevitabili errori di troncamento

(dovuti sia al numero finito di cifre significative disponibili, sia all'algoritmo numerico stesso) non permettono di ottenere una soluzione corretta. Si rende quindi necessaria, in generale, una soluzione iterativa.

L'iterazione Λ

Il processo iterativo più diretto che possiamo immaginare è l'iterazione Λ , già considerata in § V.3 al momento di trattare il problema della correzione della temperatura: viene data una stima iniziale dei termini di distruzione e di creazione dei fotoni (in pratica si dà una stima della funzione sorgente) \rightarrow si calcolano le intensità specifiche $I(\tau; \mu, \nu)$ dalle rispettive equazioni TR \rightarrow si calcola il termine J_φ \rightarrow si ricalcolano i termini di creazione e distruzione dei fotoni. Sfortunatamente questo semplice schema nella pratica non converge. Le ragioni del fallimento, analogamente ai casi precedentemente considerati, sono facilmente individuabili.

La difficoltà essenziale viene qui dal calcolo iterativo del termine di "diffusione" J_φ . A grandi profondità ottiche la soluzione $I(\tau; \mu, \nu)$, ottenuta a partire dai valori correnti S^0 della funzione sorgente, coincide praticamente con quest'ultima, e risulta essere pertanto pressochè isotropa. Quindi, al momento di ricalcolare il termine J_φ , avremo $J(\tau; \nu) \simeq I(\tau; \mu, \nu) \simeq S^0(\tau; \nu)$. Pertanto, a grandi profondità ottiche, i valori ricalcolati di $J_\varphi(\tau)$ coincideranno quasi con quelli di partenza, $J_\varphi^0(\tau)$. Dal punto di vista della precisione numerica dell'algoritmo, i valori iniziali e quelli ricalcolati risultano indistinguibili ai fini del calcolo, e diviene quindi impossibile correggere la funzione sorgente.

In altre parole, a grandi profondità ottiche la funzione sorgente trasportata, da un ciclo d'iterazione al successivo, una grande quantità di informazione spuria, "congelata" a partire dalla stima iniziale.

L'iterazione Λ implicita

Abbiamo individuato il punto debole dell'iterazione Λ nel caso che stiamo considerando: l'impossibilità di ricalcolare, nella pratica, l'integrale di "diffusione" J_φ . La funzione sorgente trascina con sé, da un ciclo al successivo, un sovraccarico di informazione spuria, introdotta all'atto della stima iniziale e che l'algoritmo numerico non è in grado di eliminare. Vedremo ora come, utilizzando in modo ottimale l'informazione contenuta nei dati del nostro problema, che è - lo ricordiamo - un problema di condizioni al contorno assegnate in due punti distinti del sistema fisico, potremo ridurre

drasticamente il fardello dell'informazione spuria trasportata dall'iterazione Λ "classica".

A tale fine, giocheremo con la possibilità che ci viene offerta dall'avere le condizioni iniziali assegnate in due punti distinti del mezzo fisico.

Data l'ipotesi di una geometria piano-parallela, il sistema formato dall'insieme delle equazioni (6.30) può essere scomposto, come abbiamo visto in § 3.2.2, nei due sistemi corrispondenti alle intensità incidenti (cf. eq. [3.17]) ed alle intensità emergenti (cf. eq. [3.16]):

$$-\mu \frac{dI^-(\tau; \mu, \nu)}{d\tau} = \varphi(\nu) [I^-(\tau; \mu, \nu) - S(\tau; \nu)] \quad (6.34)$$

e

$$\mu \frac{dI^+(\tau; \mu, \nu)}{d\tau} = \varphi(\nu) [I^+(\tau; \mu, \nu) - S(\tau; \nu)] . \quad (6.35)$$

Le condizioni iniziali, $I^-(0; \mu, \nu)$ ed $I^+(\tau_{MAX}; \mu, \nu)$ sono assegnate rispettivamente alla superficie, dove $\tau = 0$, ed al fondo, dove $\tau = \tau_{MAX}$. Le condizioni iniziali costituiscono un *dato* del problema.

Le due famiglie di equazioni, date rispettivamente dalle eq. (6.34) e (6.35), ammettono una soluzione formale in termini della funzione sorgente $S(\tau; \nu)$, assunta come nota. Meglio detto, se fosse conosciuta la funzione sorgente, ogni equazione si ridurrebbe ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Per un cammino di integrazione che va da τ_a a τ_b , con $\tau_b > \tau_a$, le soluzioni formali delle equazioni (6.34) e (6.35) sono rispettivamente

$$I^-(\tau_b; \mu, \nu) = I^-(\tau_a; \mu, \nu) e^{-\varphi(\nu)(\tau_b - \tau_a)/\mu} + \int_{\tau_a}^{\tau_b} S(t) e^{-\varphi(\nu)(t - \tau_a)/\mu} \frac{\varphi(\nu)}{\mu} dt \quad (6.36)$$

e

$$I^+(\tau_a; \mu, \nu) = I^+(\tau_b; \mu, \nu) e^{-\varphi(\nu)(\tau_b - \tau_a)/\mu} + \int_{\tau_a}^{\tau_b} S(t) e^{-\varphi(\nu)(\tau_b - t)/\mu} \frac{\varphi(\nu)}{\mu} dt . \quad (6.37)$$

L'ulteriore idea, che ci permetterà la realizzazione di un efficiente algoritmo iterativo è quella di *rappresentazione implicita* del campo di radiazione. Partiremo da un'ipotesi sulla dipendenza funzionale da τ della funzione sorgente $S(\tau; \nu)$. Si dovrà innanzitutto tener presente che una qualsiasi

soluzione numerica dell'equazione del trasporto radiativo implica la discretizzazione della variabile indipendente τ : tutte le quantità che intervengono nel problema saranno calcolate in corrispondenza ad una griglia discreta di valori $\{\tau_L\}$, sufficientemente fitti da permettere una buona rappresentazione della variazione con la profondità ottica delle variabili considerate.

La nostra ipotesi sarà che, dentro ogni intervallo (τ_L, τ_{L+1}) , delimitato da punti successivi con profondità ottiche $\tau_{L+1} > \tau_L$, il comportamento della funzione sorgente si possa approssimare per mezzo di un polinomio. L'esperienza insegna che l'approssimazione con una parabola, o al massimo con una cubica, fornisce ottimi risultati. Qui però, per semplificare al massimo la notazione al fine di una più chiara esposizione dell'algoritmo, presenteremo il caso di una funzione sorgente $S(\tau; \nu)$ che è lineare dentro ogni intervallo (τ_L, τ_{L+1}) . In tale maniera, la derivata prima con rispetto a τ sarà costante nell'intervallo, ed il suo valore sarà dato da

$$S'(\tau; \nu) \equiv \frac{dS(\tau; \nu)}{d\tau} = \frac{S_{L+1} - S_L}{\Delta\tau}, \quad (6.38)$$

dove S_L ed S_{L+1} sono i valori della funzione sorgente negli estremi dell'intervallo (τ_L, τ_{L+1}) , e $\Delta\tau \equiv \tau_{L+1} - \tau_L$. Ovviamente, la derivata seconda sarà nulla.

E' facile a questo punto, partendo dalle equazioni (6.36) e (6.37), ottenere le relazioni

$$\begin{aligned} I_{L+1}^- &= I_L^- e^{-\varphi_\nu \Delta\tau/\mu} + \left[1 + \frac{\mu}{\varphi_\nu \Delta\tau} (1 - e^{-\varphi_\nu \Delta\tau/\mu}) \right] S_L + \\ &- \left[e^{-\varphi_\nu \Delta\tau/\mu} + \frac{\mu}{\varphi_\nu \Delta\tau} (1 - e^{-\varphi_\nu \Delta\tau/\mu}) \right] S_{L+1} \end{aligned} \quad (6.39)$$

e

$$\begin{aligned} I_L^+ &= I_{L+1}^+ e^{-\varphi_\nu \Delta\tau/\mu} - \left[1 + \frac{\mu}{\varphi_\nu \Delta\tau} (1 - e^{-\varphi_\nu \Delta\tau/\mu}) \right] S_L + \\ &+ \left[e^{-\varphi_\nu \Delta\tau/\mu} + \frac{\mu}{\varphi_\nu \Delta\tau} (1 - e^{-\varphi_\nu \Delta\tau/\mu}) \right] S_{L+1} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Se indichiamo con i simboli P_L^- e P_{L+1}^- i coefficienti di S_L ed S_{L+1} nell'eq. (6.39), e con P_L^+ e P_{L+1}^+ quelli nell'eq. (6.40), possiamo sintetizzare le due precedenti relazioni nella forma

$$I_{L+1}^- = I_L^- e^{-z} + P_L^- S_L + P_{L+1}^- S_{L+1} \quad (6.41)$$

e

$$I_L^+ = I_{L+1}^+ e^{-z} + P_L^+ S_L + P_{L+1}^+ S_{L+1}, \quad (6.42)$$

dove si è posto $z \equiv \varphi_\nu \Delta\tau/\mu$. (Si osservi che tra le due coppie di coefficienti valgono le relazioni $P_L^- = -P_L^+$ e $P_{L+1}^- = -P_{L+1}^+$. È importante sottolineare che detti coefficienti sono funzione solamente del fattore geometrico $\mu \equiv \cos \theta$ e dello spessore ottico $\Delta\tau \equiv \tau_{L+1} - \tau_L$, oltre che del profilo φ_ν .)

Nel caso di un'approssimazione di ordine superiore, entrano in gioco ulteriori coefficienti moltiplicativi per i valori delle derivate di ordine superiore. Saranno però sempre coefficienti calcolati direttamente dalla soluzione formale dell'equazione TR, ed espressi *solamente* in termini dei parametri μ , $\Delta\tau$ e φ_ν . Ora, se i valori della funzione sorgente e delle sue derivate fossero noti (vale a dire se la funzione sorgente fosse assunta nota), avremmo semplicemente riottenuto in forma compatta la soluzione formale delle equazioni TR. Se al contrario ignoriamo detti valori, le equazioni (6.41) e (6.42) danno una *rappresentazione implicita* del campo di radiazione, *soluzione* delle equazioni TR considerate.

Vedremo ora in dettaglio come fare uso della rappresentazione implicita dentro un algoritmo iterativo per la soluzione delle equazioni TR.

a) Un'iterazione Λ semi-implicita

Cominceremo coll'esaminare il caso in cui la rappresentazione implicita del campo di radiazione viene usata solamente per calcolare le intensità emergenti I^+ , consistentemente con i valori ricalcolati della funzione sorgente.

Come in uno qualsiasi dei cicli di un'iterazione Λ ordinaria, conosciamo i valori $\{S^0(\tau_L; \nu), \tau_L = 1, 2, \dots, NL\}$, della funzione sorgente (stima iniziale o insieme dei valori correnti, risultato del ciclo precedente). La separazione del campo di radiazione nelle due famiglie di intensità specifiche, quelle incidenti con condizioni iniziali assegnate alla superficie, e quelle emergenti con condizioni iniziali assegnate al fondo, ci permette di ricalcolare indipendentemente la soluzione del sistema delle equazioni TR, cominciando dalle prime.

Partiremo dalla superficie, dove i valori di $I_1^- \equiv I^-(\tau_1 = 0; \mu, \nu)$ sono un *dato* del problema. Successivamente, facendo uso dell'eq. (6.41) come soluzione formale dell'equazione TR, potremo calcolare tutti gli altri valori $I_L^-(L = 2, \dots, NL)$ in funzione dei valori correnti S_L^0 della funzione sorgente.

Siamo quindi in grado di calcolare e conservare per futuro uso l'insieme dei valori della quantità

$$J_{\varphi}^{-}(\tau_L) \equiv \int_0^1 d\mu \int_0^{\infty} d\nu \varphi(\nu) I^{-}(\tau_L; \mu, \nu) . \quad (6.43)$$

in tutti i punti della scala di profondità ottiche $\{\tau_L\}$.

Nel fondo sono *dati* i valori di $I^{+}(\tau_{NL}; \mu, \nu)$, e di conseguenza è nota la quantità $J_{\varphi}^{+}(\tau_{NL})$, definita analogamente a J_{φ}^{-} . Quindi, sommando il valore di $J_{\varphi}^{-}(\tau_{NL})$, calcolato in precedenza, con quello noto di $J_{\varphi}^{+}(\tau_{NL})$, otteniamo il valore di $J_{\varphi}(\tau_{NL})$ e, di conseguenza, il nuovo valore per la funzione sorgente nel fondo

$$S_{NL} \equiv S(\tau_{NL}; \nu) = \varepsilon B_{\nu} + (1 - \varepsilon) J_{\varphi}(\tau_{NL}) . \quad (6.44)$$

Sappiamo altresì calcolare implicitamente i valori di $I^{+}(\tau_{NL-1}; \mu, \nu)$, grazie all'eq. (6.42):

$$I_{NL-1}^{+} = I_{NL}^{+} e^{-z} + P_{NL-1}^{+} S_{NL-1} + P_{NL}^{+} S_{NL} , \quad (6.45)$$

usata ora come espressione implicita, in funzione dei valori di S_{NL-1} , ancora da determinare. Poichè il valore di I_{NL-1}^{-} è già stato calcolato a partire dal valore corrente di $S^0(\tau_{NL-1}; \nu)$, si ottiene immediatamente un'espressione implicita per $J_{\varphi}(\tau_{NL-1})$, nella forma

$$J_{\varphi}(\tau_{NL-1}) = \mathcal{A} + \mathcal{B} S_{NL-1} , \quad (6.46)$$

dove \mathcal{A} e \mathcal{B} sono due coefficienti, facilmente calcolati a partire da un insieme di valori noti: $J_{\varphi}^{-}(\tau_{NL-1})$, I_{NL}^{+} ed i coefficienti P_{NL-1}^{+} e P_{NL}^{+} . Per definizione,

$$S_{NL-1} = \varepsilon B_{\nu} + (1 - \varepsilon) J_{\varphi}(\tau_{NL-1}) , \quad (6.47)$$

e quindi, facendo sistema delle equazioni (6.46) e (6.47), si ottiene il valore esplicito di S_{NL-1} .

Si procede quindi in maniera analoga, risalendo da τ_{NL-1} fino a τ_1 . In questa maniera si ottiene l'insieme completo $\{S_L, L = 1, NL\}$ dei nuovi valori per la funzione sorgente, e si può procedere al successivo ciclo del processo iterativo.

La procedura di correzione, così formulata, ha fatto uso dell'informazione contenuta nei valori correnti di $S^0(\tau_L; \nu)$, che sappiamo contenere una parte di informazione spuria, *solamente* per il calcolo delle intensità incidenti I^{-} . Quando andiamo a calcolare i nuovi valori delle funzione sorgente,

le intensità emergenti I^+ sono usate in forma implicita per mezzo dell'eq. (6.42), e sono quindi consistenti con la nuova funzione sorgente.

Questo schema iterativo, che a buon diritto abbiamo chiamato *semi-implicito*, non porta però nella pratica un grande miglioramento in termini di rapidità della convergenza del processo. L'esperienza dimostra che il guadagno rispetto all'iterazione Λ ordinaria è solo di un fattore due. La ragione di ciò è facilmente spiegabile: nel corso di ogni ciclo, mentre le intensità emergenti sono calcolate consistentemente con la nuova funzione sorgente, e quindi senza fare uso di informazione spuria precedente dal ciclo anteriore, quelle incidenti sono calcolate a partire dai valori correnti della funzione sorgente, S^0 . Concretamente, al momento di calcolare i valori di $J_\varphi(\tau_L) = J_\varphi^-(\tau_L) + J_\varphi^+(\tau_L)$, solo metà dell'informazione utilizzata è corretta.

La procedura però può essere migliorata - e porterà in effetti i risultati voluti - se l'idea della rappresentazione implicita del campo di radiazione è applicata anche alle intensità incidenti. Vedremo ora come è possibile realizzare un nuovo schema iterativo, *completamente* implicito, che faccia un uso minimale dell'informazione spuria trasportata da un ciclo al successivo.

b) L'algoritmo dell'iterazione Λ implicita

Il metodo ³ è basato su di una procedura di *forward-elimination/back-substitution* (FEBS) ⁴. Anche qui, ogni ciclo del processo iterativo è diviso in due parti. Nella prima, la *forward-elimination*, si calcolano le intensità incidenti, propagando l'informazione contenuta nelle corrispondenti condizioni iniziali, $I^-(\tau = 0; \mu, \nu)$. Questo viene fatto per mezzo dell'eq. (6.39). Però, a differenza di quanto viene fatto nell'iterazione Λ semi-implicita, invece di conservare per uso successivo le quantità $J_\varphi^-(\tau)$, si calcolano e si conservano, i rapporti $\rho \equiv I_0^-/S^0$. (Abbiamo indicato con I_0^- le intensità incidenti calcolate a partire dai valori correnti S^0 della funzione sorgente.) Questo permette nella seconda parte, la *back-substitution*, di esprimere *implicitamente* I^- come $I^-(\tau; \mu, \nu) = \rho(\tau; \mu, \nu) S(\tau; \nu)$, cioè come il prodotto del fattore $\rho(\tau; \mu, \nu)$ per il valore, ancora da determinarsi, della nuova funzione sorgente $S(\tau; \nu)$. Per essere il rapporto tra due quantità omogenee, è lecito

³Il metodo è stato chiamato dai suoi autori *Forth-and-Back Implicit Lambda Iteration*; si veda O. Atanaković-Vukmanović, L. Crivellari ed E. Simonneau, 1997, *Astrophys. J.*, **487**, 735.

⁴Le procedure FEBS sono largamente usate nei problemi alle differenze finite. Si veda, p.es., S.K. Godunov e V.S. Ryabenkii, 1987, in *Studies in Mathematics and Its Applications*, Vol. 19, *Difference Schemes*, ed. J.L. Lions *et al.*, (Amsterdam:North-Holland).

aspettarsi - come del resto sarà confermato più avanti - che la quantità ρ si comporti come un fattore di iterazione.

In effetti la pratica del calcolo numerico insegna che, per garantire la stabilità del processo iterativo, è più opportuno esprimere implicitamente I^- come

$$I^-(\tau; \mu, \nu) = \rho(\tau; \mu, \nu) S(\tau; \nu) + \sigma(\tau; \mu, \nu) S'(\tau; \nu), \quad (6.48)$$

in funzione cioè dei valori della funzione sorgente S e della sua derivata prima S' .

Per rendere il discorso il più chiaro possibile, descriveremo in dettaglio lo schema FEBS dell'iterazione Λ implicita nella sua applicazione ad un problema di trasporto radiativo monocromatico lungo una sola direzione. E' questo il caso più semplice che tuttavia contiene la struttura fisico-matematica essenziale del problema dell'atomo con due livelli.

Avremo qui un'unica intensità incidente I^- , ed un'unica intensità emergente, I^+ . La direzione sarà scelta modo che i due versi di percorrenza siano caratterizzati dai valori $\mu = \pm 1$. Valgono allora le relazioni $J^- = I^-$ e $J^+ = I^+$, ed il termine di diffusione sarà dato da $J = (I^+ + I^-)/2$. La funzione sorgente si scriverà

$$S = \varepsilon B + (1 - \varepsilon) \frac{I^+ + I^-}{2}. \quad (6.49)$$

La *forward-elimination* inizia dal primo intervallo, (τ_1, τ_2) . La condizione iniziale è $I_1^- = 0$. Se facciamo l'ipotesi che la funzione sorgente è approssimabile da un arco di parabola dentro ogni intervallo (τ_L, τ_{L+1}) , tenendo in conto la soluzione formale dell'equazione TR,

$$I_2^- = \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t) e^{(\tau_2 - \tau_1)} dt,$$

si ottiene la relazione

$$I_2^- = a_2^- S_1 + b_2^- S_2 + c_2^- S_2'. \quad (6.50)$$

I coefficienti a_2^- , b_2^- e c_2^- sono direttamente calcolati dalla soluzione formale dell'equazione TR, ed i loro valori sono dati da

$$a_2^- = \frac{2}{\Delta^2} - e^{-\Delta} \left(1 + \frac{2}{\Delta} + \frac{2}{\Delta^2} \right),$$

$$b_2^- = 1 - \frac{2}{\Delta^2} - e^{-\Delta} \left(-\frac{2}{\Delta} - \frac{2}{\Delta^2} \right),$$

$$c_2^- = -1 + \frac{2}{\Delta^2} - e^{-\Delta} \left(1 + \frac{2}{\Delta} \right).$$

Si vede immediatamente che essi sono funzione solamente dello spessore ottico $\Delta \equiv \tau_2 - \tau_1$.

Dall'esame dell'eq. (6.50) si vede che I_2^- può essere scomposto nella somma di due termini, uno *non-locale*, definito da

$$\left(I_2^- \right)_{non-loc} \equiv a_2^- S_1,$$

che dipende dal valore della funzione sorgente nel precedente punto τ_1 , ed un altro, definito da

$$\left(I_2^- \right)_{loc} \equiv b_2^- S_2 + c_2^- S_2',$$

che dipende dai valori *locali* della funzione sorgente e della sua derivata.

Il nocciolo della *forward-elimination/back-substitution* consiste ora nel rimaneggiare l'espressione implicita per I_2^- , data dall'eq. (6.50), per calcolare nella *forward-elimination* dei nuovi coefficienti, che saranno efficientemente impiegati più tardi nella *back-substitution*. Sostituiamo, innanzi tutto, il termine implicito S_1 con il suo valore corrente - quindi noto - S_1^0 . Poi, per ragioni che risulteranno chiare più avanti, nella discussione conclusiva, moltiplicheremo il primo termine per un fattore di scala S_2/S_2^0 . Così manipolata, l'eq. (6.50) diventa ora

$$\begin{aligned} I_2^- &= \frac{S_2}{S_2^0} \left(a_2^- S_1^0 \right) + b_2^- S_2 + c_2^- S_2' = \\ &= \left(\frac{a_2^- S_1^0}{S_2^0} + b_2^- \right) S_2 + c_2^- S_2' = \\ &= \left[\frac{\left(I_2^- \right)_{non-loc}^0}{S_2^0} + b_2^- \right] S_2 + c_2^- S_2'. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Si vede subito che il primo termine del coefficiente che moltiplica S_2 è l'unico a contenere informazione proveniente dal ciclo anteriore. D'altra parte, per

essere un rapporto tra un'intensità specifica e la funzione sorgente dalla quale questa è stata calcolata, si può immaginare che possa giocare il ruolo di un fattore di iterazione. L'espressione implicita per I_2^- si riduce così a

$$I^- = \rho_2 S_2 + \sigma_2 S_2', \quad (6.52)$$

una funzione lineare omogenea in S_2 ed S_2' , i cui coefficienti ρ_2 e σ_2 sono noti.

Passiamo ora all'intervallo (τ_2, τ_3) , per calcolare il valore di I_3^- . Dall'eq. (6.40) si ottiene ora

$$I_3^- = I_2^- e^{-(\tau_3 - \tau_2)} + a_3^- S_2 + b_3^- S_3 + c_3^- S_3'. \quad (6.53)$$

Se sostituiamo I_2^- con la sua espressione implicita ottenuta precedentemente, l'eq. (6.53) si riscrive

$$I_3^- = \left\{ \left(\frac{a_2^- S_1^0}{S_2^0} + b_2^- \right) S_2^0 + c_2^- \left[2 \frac{S_3 - S_2^0}{\tau_3 - \tau_2} - S_3' \right] \right\} e^{-(\tau_3 - \tau_2)} + a_3^- S_2^0 + b_3^- S_3 + c_3^- S_3'. \quad (6.54)$$

Qui, come in precedenza, abbiamo sostituito il valore implicito di S_2 con il suo valore corrente S_2^0 . Abbiamo inoltre tenuto in conto che, per l'ipotesi che la funzione sorgente sia parabolica dentro ogni intervallo (τ_L, τ_{L+1}) , vale la relazione

$$S_L' = 2 \frac{(S_{L+1} - S_L)}{\tau_{L+1} - \tau_L} - S_{L+1}'. \quad (6.55)$$

Lo sviluppo dell'eq. (6.54) porta all'espressione

$$I_3^- = \alpha S_1^0 + \beta S_2^0 + \hat{b}_3 S_3 + \hat{c}_3 S_3', \quad (6.56)$$

dove α, β, \hat{b}_3 e \hat{c}_3 sono coefficienti calcolati a partire dalle quantità $(\tau_2 - \tau_1)$ e $(\tau_3 - \tau_2)$. A questo punto, moltiplicando il termine non-locale $(\alpha S_1^0 + \beta S_2^0)$ per il fattore di scala S_3/S_3^0 , otteniamo dall'eq. (6.56) la nuova relazione implicita per I_3^- :

$$I_3^- = \left(\frac{\alpha S_1^0 + \beta S_2^0}{S_3^0} + \hat{b}_3 \right) S_3 + \hat{c}_3 S_3' = \left[\frac{\left(I_3^- \right)_{non-loc}^0}{S_3^0} + \hat{b}_3 \right] S_3 + \hat{c}_3 S_3'$$

$$\equiv \rho_3 S_3 + \sigma_3 S'_3, \quad (6.57)$$

che ha la medesima forma dell'eq. (6.51).

In modo analogo si procede per le successive profondità ottiche τ_L , fino all'ultima, τ_{NL} . Si calcolano così, e si conservano per futuro uso nella *back-substitution*, i due insiemi di coefficienti $\{\rho_L\}$ e $\{\sigma_L\}$, con $L = 2, \dots, NL$.

Arrivati al termine della *forward-elimination*, dobbiamo calcolare i valori di S_{NL} , S_{NL-1} ed I_{NL}^+ . A tal fine, assumiamo come condizione iniziale al fondo che la funzione sorgente sia lineare per $\tau > \tau_{NL-1}$. Questo ci permette di scrivere

$$S'_{NL-1} = S'_{NL} = \frac{S_{NL} - S_{NL-1}}{\tau_{NL} - \tau_{NL-1}}. \quad (6.58)$$

Grazie all'approssimazione di diffusione potremo ora scrivere

$$I_{NL-1}^+ = S_{NL-1} + S'_{NL-1} \quad (6.59)$$

e

$$I_{NL}^+ = S_{NL} + S'_{NL} \quad (6.60)$$

L'eq.(6.49) per la funzione sorgente porge ora le due relazioni

$$S_{NL-1} = \varepsilon B + \frac{1 - \varepsilon}{2} [(1 + \rho_{NL-1}) S_{NL-1} + (1 + \sigma_{NL-1}) S'_{NL-1}] \quad (6.61)$$

e

$$S_{NL} = \varepsilon B + \frac{1 - \varepsilon}{2} [(1 + \rho_{NL}) S_{NL} + (1 + \sigma_{NL}) S'_{NL}] , \quad (6.62)$$

dove si è fatto uso delle relazioni implicite per I_{NL-1}^- ed I_{NL}^- , e delle equazioni (6.59) e (6.60). A questo punto, grazie all' eq. (6.58), si eliminano i termini S'_{NL-1} ed S'_{NL} , e la soluzione del sistema formato dalle equazioni (6.61) e (6.62) fornisce immediatamente i valori di S_{NL} ed S_{NL-1} , a partire dai quali si calcolano quelli di $S'_{NL} = S'_{NL-1}$, I_{NL}^+ ed I_{NL-1}^+ .

Il passo successivo è quello di calcolare I_{NL-2}^+ , che è dato da

$$I_{NL-2}^+ = I_{NL-1}^+ e^{-(\tau_{NL-1} - \tau_{NL-2})} + a_{NL-2}^+ S_{NL-2} + b_{NL-2}^+ S_{NL-1} + c_{NL-2}^+ S'_{NL-1}. \quad (6.63)$$

Anche i coefficienti a_{NL-2}^+ , b_{NL-2}^+ e c_{NL-2}^+ si calcolano facilmente, e si ottiene

$$a_{NL-2}^+ = 1 - \frac{2}{\Delta} + \frac{2}{\Delta^2} - e^{-\Delta} \frac{2}{\Delta^2},$$

$$b_{NL-2}^+ = \frac{2}{\Delta} - \frac{2}{\Delta^2} - e^{-\Delta} \left(1 - \frac{2}{\Delta^2} \right),$$

$$c_{NL-2}^+ = -1 + \frac{2}{\Delta} - e^{-\Delta} \left(1 + \frac{2}{\Delta} \right).$$

dove $\Delta \equiv \tau_{NL-1} - \tau_{NL-2}$. Poichè i valori di S_{NL-1} ed S'_{NL-1} sono già stati calcolati, l'eq. (6.63) può essere messa nella forma

$$I_{NL-2}^+ = p_{NL-2} + q_{NL-2} S_{NL-2}, \quad (6.64)$$

$$I_{NL-2}^- = \rho_{NL-2} S_{NL-2} + \sigma_{NL-2} S'_{NL-2}. \quad (6.65)$$

Per la relazione espressa dall'eq. (6.55), abbiamo che

$$S'_{NL-2} = 2 \frac{S_{NL-1} - S_{NL-2}}{\tau_{NL-1} - \tau_{NL-2}} - S'_{NL-1}. \quad (6.66)$$

Pertanto, possiamo riscrivere l'eq.(6.65) nella forma

$$I_{NL-2}^- = v_{NL-2} + w_{NL-2} S_{NL-2}. \quad (6.67)$$

Facendo ora uso delle equazioni (6.64) e (6.67), otteniamo J_{NL-2} in funzione di S_{NL-2} :

$$J_{NL-2} = \alpha_{NL-2} + \beta_{NL-2} S_{NL-2}. \quad (6.68)$$

A partire da quest'ultima relazione, facendo nuovamente uso dell'eq. (6.49), si deriva facilmente il valore di S_{NL-2} , e da quest'ultimo quello di I_{NL-2}^+ . Determinati così i valori espliciti al fondo, si ripete la procedura dentro lo schema della *back-substitution*, fino ad arrivare al valore di S_1 alla superficie.

Lo schema dell'iterazione Λ implicita, che abbiamo studiato in dettaglio per il caso semplificato del trasporto monocromatico unidirezionale, rimane lo stesso quando viene applicato al problema dell'atomo con due

livelli. Concluderemo ora il nostro discorso con un'analisi delle proprietà essenziali dell'iterazione Λ implicita, il che ci permetterà di capire perchè quest'ultima supera la difficoltà intrinseca dell'iterazione Λ ordinaria.

Dentro il processo iterativo di correzione della funzione sorgente, indipendentemente da quale sia l'algoritmo scelto, si devono sempre ricalcolare i nuovi valori S a partire da quelli correnti S^0 , che contengono l'informazione necessaria per poter risolvere il sistema delle equazioni TR. Il problema è che parte di tale informazione è spuria: fino a quando non si sia ottenuta la soluzione corretta, i valori di S^0 contengono un residuo di errore che si portano dietro dalla stima fatta per inizializzare il processo iterativo.

L'iterazione Λ ordinaria calcola esplicitamente dentro ogni ciclo i valori del termine di "diffusione" J_φ a partire dai valori correnti S^0 della funzione sorgente. L'iterazione semi-implicita utilizza esplicitamente solo la metà J_φ^- del termine di diffusione, che è l'unica a venir calcolata con i valori di S^0 . L'iterazione implicita, infine, scompone il termine J_φ nella somma dei due contributi J_φ^{loc} e $J_\varphi^{non-loc}$, definiti in modo tale che il termine *locale* $J_\varphi^{loc}(\tau)$ dipenda linearmente dai valori - ancora da determinarsi - di $S(\tau)$ ed $S'(\tau)$ attraverso una relazione del tipo

$$J_\varphi^{loc}(\tau) = \rho^{loc}(\tau) S(\tau) + \sigma^{loc}(\tau) S'(\tau),$$

dove i coefficienti $\rho^{loc}(\tau)$ e $\sigma^{loc}(\tau)$ sono determinati direttamente per mezzo della soluzione formale dell'equazione TR, grazie all'ipotesi fatta sulla forma funzionale della funzione sorgente $S(\tau)$. In tale maniera, questi ultimi risultano indipendenti dai valori correnti di $S^0(\tau)$. E' solamente il contributo delle intensità incidenti, J_φ^- , al termine non-locale $J_\varphi^{non-loc}(\tau)$ che deve essere calcolato a partire dai valori di $S^0(\tau)$.

Quindi, solamente la parte non-locale del termine $J_\varphi^-(\tau)$ viene a raccogliere l'informazione, in parte spuria, contenuta nei valori correnti di $S^0(\tau)$ della funzione sorgente. La parte locale di $J_\varphi^-(\tau)$ ed il termine $J_\varphi^+(\tau)$ completo sono espressi *implicitamente* in funzione dei valori - che sono ancora da determinarsi, ma che nel processo di *back-substitution* saranno quelli *corretti* - della funzione sorgente. Ne consegue che, a differenza delle altre, l'iterazione Λ implicita fa uso dentro ogni ciclo della quantità *minima* necessaria di informazione per ricalcolare il termine $J_\varphi(\tau)$ e correggere la funzione sorgente. Inoltre, come si vede dallo schema della *forward-elimination* che abbiamo descritto più sopra, nel calcolo della parte non-locale di $J_\varphi^-(\tau)$, ad ogni profondità ottica τ_L si utilizzano solamente i valori $\{S^0(\tau_l)\}$ per i quali vale $l < L$.

Inoltre, nell'iterazione Λ implicita è stato introdotto un'ulteriore miglioramento, che risulta essere sostanziale. All'atto di calcolare la par-

te non-locale di $J_{\varphi}^{-}(\tau_L)$ non vengono in realtà utilizzati i valori correnti $\{S^0(\tau_l); \tau_l < \tau_L\}$ della funzione sorgente, ma quelli di una funzione "scalata" $S^*(\tau_L)$. Ritorna qui il discorso, lasciato in sospenso più sopra, del fattore di scala S_L/S_L^0 . Grazie ad esso la nuova funzione $S^*(\tau_L)$ conserva la forma dell'originale $S^0(\tau_L)$, ma i suoi valori risultano opportunamente scalati, in modo che il valore di $S^*(\tau_L)$ viene a coincidere con quello di $S(\tau_L)$ quando quest'ultimo è calcolato esplicitamente nella *back-substitution*. In questa maniera i valori correnti realmente utilizzati per il calcolo della parte non-locale di $J_{\varphi}^{-}(\tau_L)$ contengono una parte di informazione esplicita che proviene dalla "vecchia" funzione sorgente S^0 alle profondità $\tau_l < \tau_L$, ed una parte, fornita implicitamente, dalla nuova.

In altre parole, dentro ogni ciclo del processo, l'iterazione Λ implicita calcola e fa uso di un *fattore di iterazione*: il rapporto $(J_{\varphi}^{-})_{non-loc} / S^0$ tra il valore della parte non-locale del valor medio delle intensità specifiche *incidenti* ed il valore corrente della funzione sorgente.

6.4 Il caso dell'atomo con vari livelli

Abbiamo percorso fin qui un lungo itinerario che, partendo dall'analisi del carattere non-lineare del problema delle atmosfere stellari, ci ha portato ad un approccio iterativo sequenziale che permette la soluzione numerica del problema. Abbiamo visto che la difficoltà essenziale, all'origine del frequente insuccesso dei metodi convenzionali, radica nel forte accoppiamento tra i distinti processi fisici che mutuamente si condizionano, e che si riflette dal punto di vista matematico nella forte non-linearità del sistema di equazioni che rappresentano la fisica del problema. La strategia vincente è risultata essere quella di isolare distinti sottoinsiemi (blocchi) del sistema fisico globale, e di risolvere separatamente le equazioni ad essi corrispondenti, trasportando l'informazione necessaria dall'uno all'altro per mezzo di quelli che abbiamo chiamato i fattori di iterazione.

Come conclusione del discorso, vogliamo mostrare un ultimo caso, che illustra in modo particolarmente significativo la strategia sopra esposta. Vuole essere un po' quello che Manzoni avrebbe chiamato "il sugo di tutta la storia".

Considereremo il caso di un atomo con vari livelli di energia, quando per lo stato della materia non valga l'ipotesi di ETL. Abbiamo studiato in § 2.6 il problema della determinazione delle popolazioni atomiche in condizioni di non-ETL, dove eravamo arrivati a scrivere nell'eq. (2.42) la forma dell'equazione cinetica per un generico livello j :

$$\sum_{u>j} N_u (N_e C_{uj} + A_{uj} + B_{uj} \bar{J}_{ju}) + \sum_{l<j} N_l (N_e C_{lj} + B_{lj} \bar{J}_{jl}) =$$

$$N_j \left[\sum_{u>j} (N_e C_{ju} + B_{ju} \bar{J}_{ju}) + \sum_{l<j} (N_e C_{jl} + A_{jl} + B_{jl} \bar{J}_{jl}) \right]. \quad (6.69)$$

Se consideriamo un atomo che abbia N livelli discreti, il sistema formato dalle $N - 1$ equazioni che risultano linearmente indipendenti, assieme alla necessaria condizione di chiusura $\sum_j N_j = N_{tot}$, costituisce il sistema delle Equazioni dell'Equilibrio Statistico (EES).

Una parte dei coefficienti del sistema EES contiene i termini radiativi \bar{J}_{lu} (definiti dall'eq. [2.28]), che esprimono l'energia radiante assorbita dalle singole transizioni $l \rightarrow u$. Ci troveremo quindi di fronte alla necessità di risolvere il problema del trasporto radiativo per le righe spettrali corrispondenti alle $N(N - 1)/2$ transizioni che intercorrono tra gli N livelli. Per ogni singola riga spettrale, ci ridurremo ad un insieme discreto di $N_I \times N_J$ equazioni TR (si considerano N_J direzioni ed N_I punti in frequenza), ciascuna delle quali avrà la medesima funzione sorgente S_{lu} . In totale, avremo da risolvere un sistema di $(N_I \times N_J) \times N(N - 1)/2$ equazioni TR.

Per ogni specifica equazione TR, i coefficienti di assorbimento, $a_{lu}(\nu)$, e di emissione, $\eta_{ul}(\nu)$, saranno quelli definiti in § 2.5. Riscriveremo le equazioni (2.40) e (2.39), tenendo in conto che stiamo considerando il caso della completa ridistribuzione, per cui vale $\varphi(\nu) = \psi(\nu)$. Avremo quindi

$$a_{lu}(\nu) = \bar{a}_{lu} \varphi(\nu) = \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} (B_{lu}N_l - N_u B_{ul}) \varphi(\nu) \quad (6.70)$$

ed

$$\eta_{ul}(\nu) = \bar{\eta}_{ul} \varphi(\nu) = \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} N_{ul} A_{ul} \varphi(\nu). \quad (6.71)$$

La funzione sorgente per ogni transizione tra i livelli l ed u risulterà essere

$$S_{lu} = \frac{\bar{\eta}_{ul}}{\bar{a}_{lu}} = \frac{N_u A_{ul}}{N_l B_{lu} - N_u B_{ul}}. \quad (6.72)$$

Le equazioni (6.70) e (6.71) hanno lo stesso contenuto fisico della relazione di Füchtbauer, alla quale abbiamo fatto cenno in § 2.6 (cf. eq. [2.33]). Nel

mettere in evidenza il legame tra i coefficienti macroscopici, \bar{a}_{lu} ed $\bar{\eta}_{ul}$, e le popolazioni dei corrispondenti livelli l ed u , esse fanno vedere chiaramente come le popolazioni atomiche costituiscano il nerbo dei coefficienti del trasporto. Sulla base di tali considerazioni, possiamo riscrivere le equazioni del sistema EES in una nuova forma, particolarmente espressiva:

$$\sum_{l < j} N_e (N_l C_{lj} - N_j C_{jl}) + \sum_{u > j} N_e (N_u C_{uj} - N_j C_{ju}) + \sum_{u > j} \frac{4\pi}{h\nu_{ju}} (\bar{\eta}_{uj} - \bar{a}_{ju} \bar{J}_{ju}) + \sum_{l < j} \frac{4\pi}{h\nu_{lj}} (\bar{a}_{lj} \bar{J}_{lj} - \bar{\eta}_{lj}) = 0, \quad (6.73)$$

dove i termini \bar{a}_{lu} ed $\bar{\eta}_{ul}$, per la loro struttura messa in evidenza dalle equazioni (6.70) e (6.71), possono essere considerati alla stregua di incognite del sistema EES.

Il sistema EES fornisce l'insieme delle leggi di conservazione che determinano l'accoppiamento tra i due sottoinsiemi fisici, trasporto radiativo ed equilibrio statistico, nei quali possiamo idealmente separare il problema globale della formazione delle righe spettrali in un atomo con molti livelli.

Un semplice esame dell'eq. (6.73) mostra come l'accoppiamento tra i due sottoinsiemi sia particolarmente intricato: parte dei coefficienti delle incognite del sistema EES - i termini radiativi \bar{J}_{lu} - provengono dalla soluzione dell'insieme delle equazioni TR. Tale legame implica altresì l'interdipendenza delle specifiche equazioni TR: i valori dei coefficienti \bar{a}_{lu} ed $\bar{\eta}_{ul}$, e pertanto quello delle funzioni sorgente S_{lu} di ogni singola transizione, sono determinati dalla soluzione del sistema EES. e quindi dipendono dai valori di *tutte* le popolazioni dei livelli atomici.

La natura del legame risulta qui differente da quello che avevamo precedentemente incontrato nel caso della determinazione autoconsistente della temperatura in un'atmosfera stellare. Allora l'insieme delle distinte equazioni TR era accoppiato per mezzo di un unico termine, $J_a = \int a_\nu J_\nu d\nu$, attraverso un'unica legge di conservazione, espressa dall'equazione dell'equilibrio radiativo. Ora l'accoppiamento è dato dall'insieme delle popolazioni N_j , i cui valori provengono dalla soluzione del sistema EES, che esprime matematicamente le condizioni di conservazione imposte dall'equilibrio statistico tra i livelli.

Siamo dunque in presenza di un legame di carattere vettoriale e *fortemente* non-lineare. Vedremo ora come questo si possa ridurre ad un accoppiamento *debole*, scomponendo il blocco TR nei due sottoinsiemi delle intensità incidenti $I_{\mu\nu}^-$ ed emergenti $I_{\mu\nu}^+$, ed accoppiando i tre sottostemi $I_{\mu\nu}^-$, $I_{\mu\nu}^+$ ed EES per mezzo di opportuni fattori di iterazione.

L'algoritmo per la soluzione del problema avrà nuovamente la struttura di una *forward-elimination/back-substitution*. I valori correnti $N_j^0(z)$ delle popolazioni saranno usati per calcolare la griglia di profondità ottiche $\tau_{\mu\nu}(z)$ per l'insieme di punti discreti z_L , μ_I e ν_J , a partire dai corrispondenti valori $a_{lu}^0(\nu)$ dei coefficienti di assorbimento. In effetti, l'esperienza insegna che la trasmissione diretta dell'informazione da un ciclo al successivo non è critica per il calcolo iterativo dei coefficienti di assorbimento.

Per ciascuna delle righe spettrali considerate, le due famiglie $I_{\mu\nu}^-$ ed $I_{\mu\nu}^+$ saranno trattate separatamente, come se le corrispondenti equazioni TR fossero indipendenti. L'accoppiamento imposto dalla condizione dell'equilibrio statistico si realizzerà, come vedremo, durante la fase della *back-substitution*.

In modo analogo a quanto abbiamo visto nella precedente trattazione dell'iterazione Λ implicita, al termine del processo di *forward-elimination* abbiamo calcolato ed immagazzinato per ogni punto di profondità z_L i coefficienti delle relazioni lineari

$$\bar{J}_{lu}^-(z_L) = [\gamma_{lu}(z_L) + C_{lu}^-(z_L)] + D_{lu}^-(z_L) S_{lu}(z_L). \quad (6.74)$$

Anche qui solo il termine $\gamma_{lu}(z_L)$ è calcolato esplicitamente in ogni punto a partire dai valori correnti S_{lu}^0 della corrispondente funzione sorgente nei punti $z_{L'}$ antecedenti il punto z_L . La dipendenza dai valori correnti delle popolazioni atomiche risulterà pertanto essere *debole*. I coefficienti $C_{lu}^-(z_L)$ e $D_{lu}^-(z_L)$ sono calcolati direttamente dalla soluzione formale dell'equazione TR per $I_{\mu\nu}^-(z)$, e dipendono solo dal fattore geometrico μ e dallo spessore ottico $\Delta\tau_\nu$.

Nel fondo i valori dei termini $\bar{J}_{lu}^+(z_{NL})$ sono conosciuti, perchè sono dati quelli di $I_{\mu\nu}^+(z_{NL})$. Risulteranno pertanto facilmente calcolabili i valori dei coefficienti della relazione lineare

$$\begin{aligned} \bar{J}_{lu}(z_{NL}) = \Psi_{lu}(z_{NL}) + \Phi_{lu}(z_{NL}) S_{lu}(z_{NL}) = \\ \Psi_{lu}(z_{NL}) + \Phi_{lu}(z_{NL}) \frac{\bar{\eta}_{ul}(z_{NL})}{\bar{a}_{lu}(z_{NL})}, \end{aligned} \quad (6.75)$$

che esprime implicitamente il termine radiativo $\bar{J}_{lu}(z_{NL})$ in funzione della corrispondente funzione sorgente $S_{lu}(z_{NL})$.

A questo punto, la sostituzione dei termini radiativi $\bar{J}_{lu}(z_{NL})$ per la loro espressione implicita data dall'eq. (6.75), dentro il sistema EES espresso dall'eq. (6.73), porta al nuovo sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
& \sum_{l<j} N_e (N_l C_{lj} - N_j C_{jl}) + \sum_{u>j} N_e (N_u C_{uj} - N_j C_{ju}) + \\
& \sum_{u>j} \frac{4\pi}{h\nu_{ju}} [(1 - \Phi_{ju}) \bar{\eta}_{uj} - \bar{a}_{ju} \Psi_{ju}] + \\
& \sum_{l<j} \frac{4\pi}{h\nu_{lj}} [\bar{a}_{lj} \Psi_{lj} - (1 - \Phi_{lj}) \bar{\eta}_{lj}] = 0, \quad (6.76)
\end{aligned}$$

che, riscritto nei termini delle incognite N_j , diventa

$$\begin{aligned}
& \sum_{l<j} N_e (N_l C_{lj} - N_j C_{jl}) + \sum_{u>j} N_e (N_u C_{uj} - N_j C_{ju}) + \\
& \sum_{u>j} [(1 - \Phi_{ju}) A_{uj} N_u - \Psi_{ju} (B_{ju} N_j - B_{uj} N_u)] + \\
& \sum_{l<j} [\Psi_{lj} (B_{lj} N_l - B_{jl} N_j) - (1 - \Phi_{lj}) A_{jl} N_j] = 0. \quad (6.77)
\end{aligned}$$

Nella nuova formulazione del sistema EES, data dall'eq. (6.77), i coefficienti delle incognite N_j sono tutti noti: a parte i coefficienti di Einstein-Milne, essi contengono i termini Ψ_{lu} e Φ_{lu} , che provengono dalla relazione espressa dall'eq. (6.75). Come è facile vedere, soltanto i coefficienti Ψ_{lu} contengono un contributo di informazione non-locale spuria, che proviene dai valori delle "vecchie" popolazioni N_j^0 , attraverso i valori correnti S_{lu}^0 delle funzioni sorgente.

Ottenute in questa maniera le "nuove" popolazioni N_j , consistenti con la soluzione delle equazioni TR, si calcolano i valori corretti delle funzioni sorgente S_{lu} alla profondità z_{NL} . Siamo così in grado di risolvere le equazioni TR per le intensità emergenti $I_{\mu\nu}^+$ alla profondità z_{NL-1} e z_{NL} , e di ripetere la procedura.

Il processo di *back-substitution* si itera, strato per strato, fino a raggiungere la superficie. L'efficienza dell'algoritmo è provata dalla bontà dei risultati che esso produce ⁵.

⁵Il lettore interessato li troverà, assieme ad una presentazione dettagliata del metodo, nel già citato articolo *A Forth-and-Back Implicit Λ -Iteration*, O. Atanacković-Vukmanović, L. Crivellari ed E. Simonneau, 1997, *Astrophys. J.*, **487**, 735.

A rischio di risultare pedanti ed abusare della pazienza del lettore, vogliamo concludere il discorso fin qui sviluppato, con una serie di considerazioni, valide tanto nel presente caso come in quelli precedentemente esaminati, che mettono in luce i punti di forza della nostra procedura iterativa "strutturata", nel presente caso come in quelli precedentemente esaminati.

In generale, di fronte ad un problema non-lineare, o le cui dimensioni numeriche siano tali da impedirne una soluzione diretta, si rende inevitabilmente necessaria una soluzione iterativa. Dentro ogni passo dell'algoritmo il problema originale viene ridotto ad uno più semplice. Questo però implica fare uso, in ogni ciclo del processo, di una certa quantità di informazione proveniente dal ciclo precedente (o da una stima iniziale nel caso del primo passo). Di questa informazione, contenuta nei valori correnti delle variabili che devono essere via via corretti, una parte è spuria. E' prevedibile che quanto maggiore sarà la quantità di informazione spuria trasportata, tanto più lenta risulterà la convergenza alla soluzione corretta. Potremmo parlare di "inerzia" del processo iterativo; di conseguenza la strategia sarà quella di disegnare un algoritmo che abbia la minima inerzia possibile, che trasporti cioè solamente quella quantità minimale di informazione che è necessaria per garantirne la stabilità numerica.

Nel caso dell'atomo con vari livelli di energia, abbiamo visto che l'agente dell'accoppiamento tra i due sottosistemi fisici, trasporto radiativo ed equilibrio statistico, è l'insieme dei termini $\bar{J}_{lu}(z)$, l'intensità media del campo di radiazione integrato sopra i profili delle righe spettrali considerate. Saranno pertanto queste le quantità fisiche protagoniste naturali del processo iterativo, i cui valori correnti dovranno essere trasferiti da un ciclo al successivo.

Il primo passo introdotto per realizzare la strategia di cui sopra consiste nello scomporre ogni termine \bar{J}_{lu} in una parte locale ed una non-locale. La prima dipenderà linearmente dalla corrispondente funzione sorgente S_{lu} attraverso il coefficiente Φ_{lu} , che è indipendente da S_{lu} . La seconda, Ψ_{lu} , dai valori della funzione sorgente in tutti gli altri punti del mezzo. (Cf. eq. [6.75].) In questo modo l'informazione spuria, che proviene dalla soluzione delle equazioni TR e viene trasferita al sistema EES, risulta ridotta. In effetti, tutti i metodi correntemente usati per accelerare l'iterazione Λ ordinari si basano su questa idea, e differiscono tra loro solamente nel modo di separare la parte locale e quella non-locale dei termini \bar{J}_{lu} .

L'ulteriore importante passo introdotto è il seguente. La soluzione formale dell'equazione TR può fornire espressioni implicite sia per la parte locale che per quella non-locale dell'intensità specifica. Però in realtà non è necessario calcolare esplicitamente la parte locale. Il fenomeno del traspor-

to radiativo fa sì che il problema globale sia un problema di condizioni al contorno assegnate in due punti distinti del mezzo. Questo costituisce in principio una difficoltà. Però, grazie alla separazione del sottoinsieme TR nelle due famiglie delle intensità specifiche incidenti, $I_{\mu\nu}^-$, ed emergenti, $I_{\mu\nu}^+$, possiamo trasformare la difficoltà in un vantaggio, utilizzando il nostro processo di "andata-e-ritorno" (*Forth-and-Back*), che permette di trasportare in modo ottimale l'informazione *esatta* contenuta nelle condizioni al contorno.

La rappresentazione implicita del campo di radiazione ci permette inoltre di rendere minima la quantità di informazione spuria trasportata. Nella fase di *forward-elimination*, i valori correnti S_{lu}^0 delle funzioni sorgente sono utilizzati solamente per calcolare i fattori di iterazione $\gamma_{lu}(z)$, che entrano nella parte non-locale dei termini $\bar{J}_{lu}^-(z)$. I restanti coefficienti della rappresentazione implicita, $C_{lu}^\pm(z)$ e $D_{lu}^\pm(z)$ non contengono nessun contributo spurio. In particolare, al momento di calcolare, in ogni punto z_L , quelli della *back-substitution*, si fa uso dei valori della funzione sorgente nei punti antecedenti, valori che già sono stati aggiornati.

Su tali fundamenta si regge la struttura a blocchi dell'algoritmo numerico che abbiamo realizzato per la soluzione del problema dell'atomo con vari livelli. I due blocchi per il trasporto radiativo descrivono un processo fisico non-locale. Trattati separatamente, trasferiscono da un punto all'altro del mezzo l'informazione esatta contenuta nelle rispettive condizioni al contorno. Il terzo blocco, il sistema EES, descrive un insieme di condizioni locali, e costituisce l'accoppiamento globale dei tre sistemi.

La chiave di volta è il fatto che si riesce a descrivere l'accoppiamento tra il campo di radiazione e lo stato della materia mediante una rappresentazione implicita del primo. Tale rappresentazione è espressa da relazioni lineari, i cui coefficienti contengono una quantità minimale di informazione spuria. Quest'ultima è localizzata nell'insieme dei fattori di iterazione che, per essere rapporti di quantità fisiche omogenee, compensano automaticamente l'errore di scala contenuto nei singoli termini.

Appendice A

I coefficienti di Einstein

Quanto segue è un estratto dell'articolo di Einstein sulla teoria quantistica della radiazione. Dopo una prima versione, pubblicata nel *Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft*, Zurigo, N. 18, 1916, venne quella più nota del 1917 in *Physikalischen Zeitschrift*, **18**, 121. (Il testo qui presentato è sostanzialmente la traduzione di una versione in francese dell'articolo originale del 1917.)

Le ipotesi introdotte da Einstein sono le seguenti.

A) *Emissione della radiazione (Ausstrahlung)*. Un risonatore di Planck che oscilla, secondo la teoria di Hertz emette energia in un modo ben determinato, sia o non sia eccitato da un campo di radiazione esterno. Supporremo in modo analogo che un atomo, senza essere perturbato da cause esterne, possa passare dallo stato Z_m allo stato Z_n con emissione di una quantità di energia pari a $\varepsilon_m - \varepsilon_n$. La probabilità che tale processo si verifichi durante l'intervallo di tempo dt sarà data da

$$d\mathcal{P}_{m \rightarrow n}^{sp} = A_m^n dt, \quad (a)$$

dove A_m^n , le cui dimensioni sono T^{-1} , rappresenta una costante caratteristica della transizione considerata ¹. L'equazione (a) implica che la probabilità è direttamente proporzionale all'intervallo di tempo dt .

B) *Immersione in un campo di radiazione (Einstrahlung)*. Se un risonatore di Planck si trova immerso in un campo di radiazione, l'energia del risonatore

¹Adotteremo qui per i coefficienti A_m^n , B_n^m e B_m^n la medesima notazione impiegata da Einstein nel suo articolo.

viene modificata per il fatto che il campo di radiazione fornisce lavoro al risonatore; questo lavoro può essere positivo o negativo, dipendendo dalla fase relativa tra il risonatore ed il campo oscillante. Sotto l'influenza di un campo di radiazione di densità u_ν , un atomo che riceva la quantità di energia $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ può passare dallo stato Z_n allo stato Z_m , secondo la legge probabilistica:

$$d\mathcal{P}_{n \rightarrow m} = B_n^m u_\nu dt . \quad (\text{b})$$

Si postula cioè che la probabilità che la transizione si verifichi nell'intervallo di tempo dt sia proporzionale, attraverso il coefficiente atomico B_n^m , alla densità di energia del campo di radiazione.

Analogamente, supporremo che la transizione da Z_m a Z_n , accompagnata dall'emissione della medesima quantità di energia, sia possibile per effetto della radiazione, secondo la legge probabilistica:

$$d\mathcal{P}_{m \rightarrow n}^I = B_m^n u_\nu dt . \quad (\text{c})$$

Le quantità B_n^m e B_m^n sono due costanti, e le loro dimensioni sono $M^{-1}L$. Einstein chiama questi due processi "cambio di stato per immersione in un campo di radiazione (*Einstrahlung*)".

In tale maniera vengono espresse le probabilità delle transizioni radiative ammesse, in termini dei tre coefficienti atomici A_m^n , B_n^m e B_m^n .

Nel suo articolo, Einstein spiega come, partendo dalle ipotesi precedenti circa i processi di emissione ed assorbimento, si arrivi a dimostrare che le particelle del materiale risultano in *equilibrio dinamico* con la radiazione termica descritta dalla formula di Planck, qualora la distribuzione degli stati energetici (intesi in senso quantistico) delle particelle siano quelli corrispondenti all'*equilibrio termodinamico* "Sono riuscito a derivare - scrive Einstein - la formula di Planck in una maniera sbalorditivamente semplice e generale. Tale legge discende dalla condizione che la distribuzione dell'energia interna delle particelle, imposta dalla teoria quantistica, è dovuta al solo effetto dell'assorbimento ed emissione della radiazione." (Einstein, *op. cit.*)

Vedremo ora come Einstein riottiene la formula di Planck e, di strada, determina le relazioni che legano tra loro i coefficienti A_m^n , B_n^m e B_m^n .

In condizioni di equilibrio termodinamico, la ripartizione dell'energia degli stati è fissata dalla distribuzione di Gibbs. Allora, per un gas alla temperatura T , che ammette una serie discreta di stati $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$, con energie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$, la frequenza relativa dello stato Z_n sarà data da

$$W_n = g_n \exp \{ -\varepsilon_n / kT \} , \quad (\text{d})$$

dove g_n è un numero indipendente da T , che può essere interpretato come il peso statistico dello stato Z_n .

Se consideriamo due stati Z_n e Z_m , con $\varepsilon_m > \varepsilon_n$, la particella può passare dallo stato Z_n a quello Z_m per assorbimento di una quantità di energia pari a $\varepsilon_m - \varepsilon_n$, e, rispettivamente, da Z_m a Z_n con perdita della medesima quantità di energia.

Affinchè sia fatta salva la conservazione della distribuzione canonica, in condizioni di equilibrio il numero di processi che spopolano uno stato dovrà essere eguale al numero di quelli che lo ripopolano. Varrà pertanto la condizione ²

$$W_n d\mathcal{P}_{n \rightarrow m} = W_m \left(d\mathcal{P}_{m \rightarrow n}^{In} + d\mathcal{P}_{m \rightarrow n}^{Sp} \right), \quad (e)$$

che, messa in forma esplicita grazie alle equazioni (a) - (c), diventa

$$g_n B_n^m u_\nu \exp \{-\varepsilon_n/kT\} = g_m (B_m^n u_\nu + A_m^n) \exp \{-\varepsilon_m/kT\}. \quad (f)$$

L'eq. (f) definisce una relazione tra i coefficienti A_m^n , B_m^n e B_n^m .

Nell'ipotesi che $u_\nu \rightarrow \infty$ quando $T \rightarrow \infty$, si ottiene che deve valere la condizione

$$g_n B_n^m = g_m B_m^n. \quad (g)$$

Se ora esplicitiamo u_ν nell'eq. (f), tenendo in conto l'eq. (g), otteniamo

$$u_\nu = \frac{A_m^n}{B_m^n} \frac{1}{e^{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/kT} - 1}, \quad (h)$$

che esprime la densità di energia del campo di radiazione in condizioni di equilibrio.

Ora, applicando la condizione quantistica di Bohr per la frequenza:

$$h\nu = \varepsilon_m - \varepsilon_n. \quad (i)$$

possiamo riscrivere l'eq. (h) come

$$u_\nu = \frac{A_m^n}{B_m^n} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (j)$$

²In questa maniera Einstein applica per la prima volta, anche se in modo implicito, il principio del *bilancio dettagliato*.

Nel caso limite che valga $h\nu/kT \ll 1$ (caso delle basse frequenze), l'eq. (j) assume la forma

$$u_\nu = \frac{A_m^n}{B_m^n} \frac{h\nu}{kT} \quad (\text{k})$$

Questa è analoga alla forma della legge di Rayleigh-Jeans

$$u_\nu = 8\pi kT \frac{\nu^2}{c^3}, \quad (\text{l})$$

dedotta in base alla teoria classica della radiazione, e che è in accordo con i dati sperimentali alle basse frequenze. È legittimo quindi, invocando il principio di corrispondenza di Bohr, trarre la conclusione che dovrà valere l'eguaglianza

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \frac{8\pi\nu^3}{c^3}. \quad (\text{m})$$

Rimane così fissato il valore del rapporto A_m^n/B_m^n , e questo ci permette di scrivere l'espressione per la densità di energia del campo di radiazione in condizioni di equilibrio:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (\text{n})$$

che è proprio la formula di Planck (per la densità di energia).

Si può anche vedere facilmente che per $h\nu/kT \gg 1$ (limite delle alte frequenze), l'eq. (n) assume la forma della legge di Wien:

$$u_\nu = \alpha \nu^3 e^{-\beta\nu/T}, \quad (\text{o})$$

dove $\alpha \equiv 8\pi/c^3$ e $\beta \equiv h/k$.

Si noti che, qualora non si tenesse in conto l'emissione indotta, la forma della distribuzione spettrale della densità di energia u_ν sarebbe quella data dalla legge di Wien.

Le relazioni tra i coefficienti A_m^n , B_n^m e B_m^n , espresse dalle equazioni (g) e (m), e che ci permettono di determinare i restanti due coefficienti noto uno di essi, sono proprietà atomiche che devono valere indipendentemente dal fatto che il sistema considerato sia stato considerato in equilibrio termodinamico.